
Hosted by Google

ÜBER DIE ANWENDUNGEN DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE INSBESONDERE ÜBER DIE PHOTOGRAMMETRIE

MIT EINEM ANHANG:
WELCHE VORTEILE GEWÄHRT
DIE BENUTZUNG DES PROJEKTIONSAPPARATES
IM MATHEMATISCHEN UNTERRICHT?

VORTRÄGE
GEHALTEN BEI GELEGENHEIT DES FERIENKURSES
FÜR OBERLEHRER DER MATHEMATIK UND PHYSIK
GÖTTINGEN, OSTERN 1904

VON

FRIEDRICH SCHILLING

MIT 151 FIGUREN UND 5 DOPPELTAFELN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1904



Vorwort.

Die vorliegende Schrift bildet den zweiten Teil (und das dritte Heft) der unter dem zusammenfassenden Titel „Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen“ erschienenen, von den Herren F. Klein und E. Riecke gesammelten Vorträge, die von diesen und den Herren O. Behrendsen, E. Bose, J. Stark, K. Schwarzschild und mir gelegentlich des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik zu Ostern 1904 in Göttingen gehalten wurden. Eine separate Herausgabe des ganzen Werkes in zwei Teilen (bezw. in drei Heften) war von vornherein deswegen in Aussicht genommen, um jedem, der besonderes Interesse für einzelne der hier behandelten Fragen besitzt, um so leichter die speziellen in Betracht kommenden Aufsätze zugänglich zu machen. Ihrer Entstehung entsprechend wendet meine Schrift sich in erster Linie an die Lehrer der Mathematik an unseren höheren Schulen; doch wird es mich freuen, wenn die Anregungen, die sie vermitteln soll, über diesen Kreis hinaus, besonders auch bei den Lehrern und Studierenden der Universitäten und Technischen Hochschulen, freundliche Aufnahme und Beachtung finden.

Den Herren Prof. S. Finsterwalder in München, Geheimrat Prof. C. Koppe in Braunschweig, Kgl. Baurat und Privatdozenten W. Körber in Charlottenburg, Hauptmann und Abteilungschef im Kgl. Bayr. Generalstabe A. Lammerer in München, Geheimen Baurat A. Meydenbauer in Berlin und meinen Göttinger Kollegen Prof. K. Schwarzschild und Prof. E. Wiechert möchte ich auch hier ganz besonders danken für die mir bereitwilligst erteilte Erlaubnis, photogrammetrische Aufnahmen von ihnen und

im Anschluß an diese ausgeführte Zeichnungen zum Abdruck zu bringen, wodurch es mir möglich wurde, in die weiten praktischen Anwendungsgebiete der Photogrammetrie einen durch lebendige Anschauung erreichten klaren Ausblick zu gewähren. Auch der Verlagshandlung B. G. Teubner in Leipzig bin ich für ihr stets bereitwilliges Eingehen auf meine Wünsche und die schöne Ausstattung des Druckes zu lebhaftem Danke verpflichtet.

Rinteln a. W., Weservilla, den 4. September 1904.

Fr. Schilling.

Inhaltsverzeichnis.



Dritter Abschnitt: Die praktischen Anwendungen der Photogrammetrie.

Anhang:

Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie.

Von FRIEDRICH SCHILLING.

Erste Vorlesung.

Einleitung: Allgemeine Bemerkungen über angewandte Mathematik und im besondern über darstellende Geometrie.

Meine Vorträge beim diesjährigen Ferienkursus sollen der „Angewandten Mathematik" gewidmet sein. Ich erinnere daran, daß in den neuen preußischen Lehrplänen von 1901 [1]) ausdrücklich darauf hingewiesen wird, wie „der Unterricht Gewinn davon hat, wenn durch die Aufgaben, deren Lösung er verlangt, auch die Anwendbarkeit der Wissenschaft auf anderen Gebieten, sei es des Lebens, sei es besonders der physikalischen Wissenschaften aufgezeigt und die Gelegenheit geboten wird, den mathematischen Sinn durch die Anwendung auf diese Gebiete zu üben". Diese Forderung soll insbesondere auch der Bedeutung gerecht werden, welche die moderne Technik in stetig steigendem Maße in unserm gesamten volkswirtschaftlichen Leben sich errungen hat. Sie soll aber auch rein didaktisch betrachtet den Unterricht in der Mathematik dadurch beleben und dem jugendlichen Geiste des Schülers anpassen, daß die rein abstrakten Gedankenketten, die nach wie vor den eigentlichen Kern bilden sollen, mit lebendiger Anschauung der uns umgebenden realen Verhältnisse verknüpft werden.

In engster Verbindung damit steht die Einführung der angewandten Mathematik in den Universitätsunterricht. Obwohl

1) Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen in Preußen von 1901, Halle a. S. 1901, p. 59. — Zum Vergleiche verweise ich auch auf die „Instruktionen für den Unterricht an den Realschulen in Österreich im Anschlusse an einen Normallehrplan", V. Aufl., Wien 1899, p. 18—20 und p. 197—229.



auf den höheren Schulen diese Disziplin kein selbständiges Unterrichtsfach ist — vielmehr soll der ganze Unterricht von dem Geiste der angewandten Mathematik durchdrungen sein —, bildet sie nach der neuen preußischen Prüfungsordnung von 1898 ein besonderes Fach für die Lehramtsprüfung, ja durch Fakultätsbeschluß können „Angewandte Mathematik" wie „Angewandte Physik" auch als besondere Fächer bei der Promotion hier in Göttingen gewählt werden.[1]) Der Wortlaut der Prüfungsvorschriften für die angewandte Mathematik ist folgender[2]): „Von den Kandidaten, welche die Lehrbefähigung in der angewandten Mathematik nachweisen wollen, ist außer einer Lehrbefähigung in der reinen Mathematik zu fordern: Kenntnis der darstellenden Geometrie bis zur Lehre von der Zentralprojektion einschließlich und entsprechende Fertigkeit im Zeichnen, Bekanntschaft mit den mathematischen Methoden der technischen Mechanik, insbesondere der graphischen Statik, mit der niederen Geodäsie und den Elementen der höheren Geodäsie nebst Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler".

Das neue Prüfungsfach umfaßt demnach namentlich drei Einzeldisziplinen: Darstellende Geometrie, Technische Mechanik und Geodäsie. Indes ist die Bezeichnung „Angewandte Mathematik" vielfach auch in anderem Sinne gebraucht worden, als wir ihn hier umgrenzen. Um nicht näher darauf einzugehen, möchte ich gleich hier auf einen kürzlich erschienenen Aufsatz von G. Hauck: „Über angewandte Mathematik"[3]) verweisen, der zur Klärung der verschiedenen Standpunkte wesentlich beiträgt und darüber hinaus sehr beachtenswerte Bemerkungen über die Stellung der angewandten Mathematik im Universitäts- und Schulunterricht enthält. — Seit etwa zehn Jahren, wenn wir von vereinzelten früheren Veröffentlichungen absehen[4]), sind überhaupt sowohl von namhaften Universitäts-

1) Das Gleiche gilt nach dem Vorgange Göttingens für die Universität Jena.

2) „Prüfungsordnung für die Kandidaten des höheren Lehramts in Preußen", Halle a. S. 1898, neuer Abdruck 1903, p. 16.

3) Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft III, p. 1—8 (Beilage zum Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, Band VII, Leipzig 1903).

4) Wir nennen z. B. die Rede von Hrn. F. Klein bei Übernahme seiner Professur für Geometrie an der Universität Leipzig (1880): „Über die Beziehungen der neueren Mathematik zu ihren Anwendungen", die übrigens im Bd. XXVI

lehrern wie auch aus Ihrem Kreise die Fragen, welche die angewandte Mathematik aufrollt, in verschiedenster Weise besprochen. Es würde zu weit führen, so interessant ein solcher historischer Rückblick ist, im einzelnen diese Bewegung zu verfolgen; es mag genügen, insbesondere auf die „Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", die „Zeitschrift für Mathematik und Physik", die jetzt ja geradezu als Organ für angewandte Mathematik ausgebildet ist, andererseits auf die „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" und die „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften" (als Fortsetzung der Berichte der Versammlungen des „Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften") zu verweisen — alles Zeitschriften, welche in jedem Jahrgang verschiedene Aufsätze über unsern Gegenstand bringen. Daneben möchte ich als Führer der Bewegung auf Seiten der Universitätslehrer besonders G. HAUCK-Charlottenburg, F. KLEIN-Göttingen, H. WEBER-Straßburg und auf Seiten der Gymnasiallehrer C. HILDEBRANDT-Braunschweig, G. HOLZMÜLLER-Hagen i. W., C. H. MÜLLER-Frankfurt a. M., O. PRESLER-Hannover und A. RICHTER-Wandsbeck nennen und Sie auf die vielen Schulprogramme und Separatabdrücke aufmerksam machen, die ich hier ausgelegt habe.[1]) Dankenswert wäre

der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" (1895) wieder abgedruckt ist. CHR. WIENER sagt ebenfalls schon in seinem Lehrbuche der darstellenden Geometrie (Band I, Leipzig 1884, p. 61): „Es erscheint ebenso als geboten, die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie in den Gymnasien einzuführen und dadurch dem Unterrichte in der Stereometrie den Erfolg zu gewähren, den er bisher entbehrte, als die höheren Teile unserer Wissenschaft auf allen Universitäten zu lehren".

1) Ich nenne von diesen:

H. WEBER, Wirkung der neuen preußischen Prüfungsordnung für die Lehramtskandidaten auf den Universitätsunterricht (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VIII, 1900, p. 95—104) und das zugehörige Korreferat von G. HAUCK (ebenda p. 105—118).

E. STUDY, Einige Bemerkungen zu der neuen preußischen Prüfungsordnung (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VIII, 1900, p. 121—137).

F. KLEIN und E. RIECKE, Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen, Vorträge, gehalten in Göttingen Ostern 1900 bei Gelegenheit des Ferienkursus für Oberlehrer, Leipzig 1900, ferner eine Reihe von Aufsätzen von

es gewiß, eine möglichst vollständige Literaturzusammenstellung die angewandte Mathematik betreffend einmal an geeigneter Stelle zu veröffentlichen.

Als Übungsbuch für den Schulunterricht, das sich in ausgedehnter Weise mit den Anwendungen der Mathematik befaßt, sei hier noch genannt: A. SCHÜLKE, Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie und Stereometrie nebst Anwendungen auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Physik, Technik und Volkswirtschaftslehre (Leipzig 1902), und insbesondere sei auch auf das Vorwort daselbst verwiesen.[1])

Ich möchte es mit diesen Bemerkungen ganz allgemeinen Charakters genug sein lassen. Denn ich selbst möchte vor Ihnen nicht in allgemeiner Weise die Fragen der angewandten Mathematik besprechen, sondern Ihnen lieber über ein spezielles Kapitel aus diesem Gebiet vortragen, um Ihnen an den ausgewählten Beispielen unmittelbar vor Augen zu führen, wie ich selbst mir die Verwendung der angewandten Mathematik beim Unterricht an den höheren Schulen denke. Diese Beispiele gehören dem Gebiet der darstellenden Geometrie an, die ja, darf ich wohl sagen, den Zentralkern des Unterrichts in der angewandten Mathematik an den Universitäten wie den

---

F. KLEIN, die im ersten Teile des Sammelbandes unserer diesjährigen Vorträge wiederabgedruckt sind.

P. STÄCKEL, Über die Entwicklung des Unterrichtsbetriebes in angewandter Mathematik an den deutschen Universitäten, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XI, 1902, p. 26—37 und Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten, ebenda Bd. XIII, 1904, p. 313—341, sowie Angewandte Mathematik an den preußischen Universitäten, Monatsschrift für höhere Schulen von KÖPKE und MATTHIAS, Berlin 1904, p. 289—297.

Die besonders die darstellende Geometrie betreffende Literatur wird von mir später noch ausführlich, insbesondere auf p. 8, genannt.

1) Ein Referat über das SCHÜLKEsche Buch gibt unter anderem OTTO RICHTER, Elementarmathematik (Neue Jahrbücher für das klass. Altertum, Geschichte und deutsche Literatur und für Pädagogik, Leipzig 1903, p. 288—304, insbesondere p. 296 ff.). — Kürzlich erschien ferner der erste Teil von B. BIEL, Mathematische Aufgaben für die höheren Lehranstalten, unter möglichster Berücksichtigung der Anwendungen wie überhaupt der Verknüpfung der Mathematik mit anderen Gebieten zusammengestellt (Leipzig 1903). Auch hier läßt dem Vorwort zufolge besonders der zweite Teil ausgedehnte Berücksichtigung der Anwendungen erwarten.

höheren Schulen bildet. Gewiß ist von jedem Studierenden der Mathematik Fertigkeit im praktischen Zeichnen sowohl wie Kenntnis des Wesens und der Methoden der darstellenden Geometrie überhaupt schon wegen ihrer innigen Beziehung zu allen anderen geometrischen Disziplinen zu wünschen, mag er im übrigen die angewandte Mathematik als Examensfach wählen oder nicht. Die darstellende Geometrie ist auch derjenige Teil der angewandten Mathematik, dessen Berechtigung im Universitätsunterricht kaum von irgend einer Seite je beanstandet ist. Sie wissen nun, daß ich als Thema meiner Vorträge speziell „*Anwendungen der darstellenden Geometrie*" angekündigt habe. Daher werde ich die grundlegenden rein geometrischen Teile dieser Disziplin, wie sie übrigens jedes Lehrbuch der darstellenden Geometrie enthält, kaum berühren, vielmehr sie als bekannt voraussetzen. Schon gelegentlich der früheren Oberlehrerkurse hier in Göttingen habe ich über die darstellende Geometrie im allgemeinen vorgetragen (Grund- und Aufrißmethode, Kavalierperspektive, Orthogonale Axonometrie, Zentralperspektive); ich verweise auf das schon genannte Buch von F. KLEIN und E. RIECKE (p. 42—56), wo diese Vorträge selbst zwar nicht ausführlich abgedruckt sind, wohl aber von den Hilfsmitteln zum Unterrichte in der darstellenden Geometrie, insbesondere unsern Göttinger Einrichtungen gesprochen wird, welch' letztere seitdem natürlich ihre Verbesserung und Erweiterung erfahren haben. Doch möchte ich hier den Begriff „Darstellende Geometrie" im weitesten Sinne gefaßt wissen, wie es gerade für den Standpunkt der höheren Schulen zweckmäßig ist, wo nicht, wie an den Hochschulen, viele einzelne Disziplinen dieser Richtung nebeneinander in besonderen Kursen behandelt werden. Ich möchte unter „Darstellender Geometrie" verstehen:

> „die Theorieen, wie man von räumlichen oder auch ebenen geometrischen Gebilden Abbilder, sei es in der Zeichenebene, sei es auch im Modell, entwerfen, an diesen Abbildern Konstruktionen gesuchter Elemente auf Grund logischer Überlegungen ausführen oder an der Hand dieser Abbilder die Eigenschaften der Gebilde selbst wissenschaftlich studieren kann."[1])

1) „Das Ziel der darstellenden Geometrie ist die Entwicklung des geistigen Vermögens der Raumanschauung an der Hand der zeichnenden und modellierenden

Hiernach soll z. B. das Maschinenzeichnen, d. h. die Lehre, einzelne Teile der Maschine (Achsenlager, Zahnräder) oder auch diese selbst zu konstruieren, hier ebenso der darstellenden Geometrie zugerechnet sein wie die Perspektive mit ihrer Anwendung im Maleratelier oder die Lehre von der Darstellung der Flächen zweiten Grades in Zeichnung oder Modell. Was die Modelle betrifft, so sei hier bemerkt, daß man beim Unterricht nicht zu sehr von ihnen Gebrauch machen wird, da der Schüler gerade lernen soll, auch ohne sie räumlich die Verhältnisse sich vorzustellen. Etwas anderes ist es mit der Selbstanfertigung der Modelle (Faden-, Draht-, Kartonmodelle, Modelle aus Laubsägeholz); hierzu einzelne Schüler, besonders die dafür veranlagten, beim Unterricht anzuregen, ist zweifellos sehr zu empfehlen.[1])

Die Anwendungen der darstellenden Geometrie dürften Ihr Interesse auch deswegen in erhöhtem Maße erwecken, weil in den neuen Lehrplänen von 1901 für die Prima des Gymnasiums und die Untersekunda des Realgymnasiums und der Oberrealschule ausdrücklich Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde[2]), sowie für die Prima der letztgenannten Lehranstalt die Grundlehren der darstellenden Geometrie vor-

Darstellung und in wissenschaftlicher Durchbildung zum sicheren räumlichen Denken" (aus dem letzten Vorwort zu W. FIEDLER, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, 4. Auflage, I. Teil, Leipzig 1904).

1) Für eine ausführliche Verwendung der Körpermodelle beim Unterricht tritt ein:

J. SCHACHT, Die Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens im mathematischen Unterricht des Gymnasiums, Programm, Posen 1903,

die Anfertigung von Modellen bespricht:

G. HOLZMÜLLER, Vorbereitende Einführung in die Raumlehre, Leipzig 1904, p. 106—123.

Was die Ausbildung der Handfertigkeit im Zeichnen betrifft, so ist diese nur durch eigene umfassende Übung unter der Leitung eines Lehrers zu erlernen. Die Hilfsmittel zum Zeichnen besprechen folgende Werke, aus denen man mancherlei praktische Winke entnehmen kann:

A. ZUR MEGEDE, Wie fertigt man technische Zeichnungen an? Berlin 1890.

N. FIALKOWSKI, Zeichnende Geometrie, Wien-Leipzig 1880.

2) Aus dem Wortlaute der Vorschriften ist nicht zu erkennen, ob hierbei etwa an die Zentralprojektion gedacht ist; doch sollte man aus didaktischen Gründen annehmen, daß in erster Linie die schiefe Parallelprojektion (Kavalierperspektive) in Frage kommt.

geschrieben sind, ganz abgesehen von dem wahlfreien Linearzeichnen. Wie wünschenswert es ist, daß letzteres im Anschluß an den mathematischen Unterricht von dem Mathematiklehrer erteilt wird, ist auch von Ihrer Seite wiederholt ausgesprochen.

Die Bedeutung des Zeichnens im mathematischen Unterricht heben die neuen Lehrpläne (p. 58/59) folgendermaßen hervor:

„Auf allen Anstalten ist schon von III ab der Übung im Konstruieren die sorgfältigste Pflege zu widmen; sie muß bis in die oberste Klasse neben den dort behandelten Gebieten fortgesetzt werden“ und: „Dem Übelstande, daß der Unterricht auf der Oberstufe einen zu ausschließlich rechnerischen Charakter annimmt, wird sich durch Fortsetzung der Übungen in geometrischer Anschauung und Konstruktion steuern lassen. Besonders ist im stereometrischen Unterrichte, ganz abgesehen von dem Betriebe der darstellenden Geometrie, das Verständnis projektivischen Zeichnens vorzubereiten und zu unterstützen.“

Wie lebhaft auch die Kreise der Gymnasiallehrer sich mit der Frage der Bedeutung und Ausgestaltung des Unterrichts in der darstellenden Geometrie an den höheren Schulen befassen, zeigen die gelegentlich der X. Versammlung des „Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften“ zu Gießen (1901) angenommenen Thesen:

1) An allen Lehranstalten ist die korrekte Herstellung der im mathematischen, insbesondere im stereometrischen Unterricht benutzten Figuren zu lehren und zu üben. Der mathematische Unterricht hat diese Aufgabe unter Zurückstellung anderer zu erfüllen.

2) Es ist notwendig, daß auf dem humanistischen Gymnasium den Schülern die Möglichkeit geboten wird, sich die Elemente der darstellenden Geometrie anzueignen. Diese Elemente sind dem stereometrischen Unterricht der Prima einzuflechten.

3) Der Unterricht in der darstellenden Geometrie ist für die drei obersten Klassen des Realgymnasiums und der Oberrealschule obligatorisch. Er ist in wöchentlich zwei Stunden von einem Mathematiker zu erteilen. Das freie Handzeichnen in den genannten Klassen ist als wahlfreies Fach beizubehalten.

4) Das propädeutische Linearzeichnen in Tertia und Unter-

sekunda der Realanstalten soll dadurch keine Beeinträchtigung erfahren und ist, besonders in Untersekunda, wenn möglich in die Hand des Mathematikers zu legen.

5) Für die Einzelgestaltung der Lehrpläne in der darstellenden Geometrie sind die in den „Unterrichtsblättern" (Jahrg. VI, Nr. 6, 1900) veröffentlichten Berichte und Gutachten als wertvolles Material zu benutzen.[1])

Was die Literatur über die darstellende Geometrie betrifft[2]), so nenne ich außer den bekannten deutschen wissenschaftlichen Werken von Chr. Wiener, K. Rohn und E. Papperitz und W. Fiedler (vgl. auch die Anm. p. 14) folgende elementaren Lehrbücher:

J. Vonderlinn, Darstellende Geometrie für Bauhandwerker, 2 Teile, Stuttgart, I, 1904 (2. Aufl.), II, 1894[3]);

W. H. Behse, Die darstellende Geometrie für Real-, Gewerbe- und Werkmeisterschulen, 2 Teile, Leipzig 1895—97;

---

1) Vgl. Unterrichtsblätter, Jahrgang VI (1900) Nr. 6 p. 102—108 (Berichte der Herren F. Pietzker und J. Schröder) und die der Nummer beigegebenen Gutachten der Herren J. E. Böttcher, E. Gerland, C. Hildebrandt, G. Holzmüller, C. H. Müller, J. Schröder, R. Schwann und der Oberrealschule zu Halle a. S. — Ferner Unterrichtsblätter, Jahrgang VII (1901) Nr. 4 (Bericht über die Versammlung in Gießen).

2) Von Abhandlungen nenne ich die in Beziehung zu den neuen Lehrplänen erschienenen Schulprogramme:

Fr. Blencke (jetzt Realschuldirektor in Hamm i. W.), Die Verbindung des Linearzeichnens mit dem stereometrischen Unterrichte auf Untersekunda, Essen 1901;

O. Meissner, Über das Linearzeichnen in Verbindung mit dem mathematischen Unterricht in der Untersekunda, Pillau 1901 (gedruckt in Königsberg i. Pr.);

F. Kronke, Das Linearzeichnen in der Realschule, Graudenz 1901;

M. Richter, Das geometrische Zeichnen in der Realschule, Leipzig 1901 (letzterer führt p. 3—4 und p. 13 eine große Zahl älterer hier zu nennender Programme und ähnlicher Schriften an);

E. Arndt, Einführung in die Stereometrie als Pensum des ersten Vierteljahres der 1. Klasse, Berlin 1904 (IV. Realschule).

Eine übersichtliche Besprechung der ganzen Entwicklung gibt:

K. Weise, Zur gegenwärtigen Lage des Unterrichts in der zeichnenden Stereometrie, Gera 1904.

3) Von demselben Verfasser ist auch das umfangreiche Werk erschienen: Lehrbuch des Projektionszeichnens, Teil I—IV, nach dem System Kleyer bearbeitet, Stuttgart 1889—90.

J. SCHLOTKE, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 4 Teile, Dresden 1893—95,

deren Verfasser sämtlich Lehrer an technischen Fachschulen sind, und daneben:

CHR. BEYEL, Darstellende Geometrie. Mit einer Sammlung von 1800 Dispositionen zu Aufgaben aus der darstellenden Geometrie, Leipzig 1901;

M. BERNHARD, Darstellende Geometrie mit Einschluß der Schattenkonstruktionen, als Leitfaden für den Unterricht an technischen Lehranstalten, Oberrealschulen und Realgymnasien, sowie zum Selbststudium, Stuttgart 1901;

C. H. MÜLLER und O. PRESLER, Leitfaden der Projektionslehre, ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie, Leipzig 1903;

W. GERCKEN, Grundzüge der darstellenden Geometrie für die oberen Klassen höherer Lehranstalten, Leipzig 1903.

Von diesen Büchern werde ich später im einzelnen noch näher zu sprechen haben, hier jedoch will ich noch die kleine Schrift von CHR. BEYEL erwähnen, „Über den Unterricht in der darstellenden Geometrie“ (Leipzig 1899; separat erschienener Abdruck aus der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht), die mit pädagogischem Geschick zusammengestellte, sehr beachtenswerte Anregungen enthält. Die drei letztgenannten Werke enthalten besonders klare und schön gezeichnete Figuren. Während jedoch die Bücher von BERNHARD und GERCKEN[1]) nur die theoretischen Teile der dar-

1) Vgl. auch den Aufsatz von W. GERCKEN, Die darstellende Geometrie auf dem Realgymnasium nach den neuen Lehrplänen, Monatsschrift für höhere Schulen von KÖPKE und MATTHIAS, Berlin 1902, woselbst der Verfasser dem Standpunkte seines Buches entsprechend für die Übernahme gewisser Teile der darstellenden Geometrie in die Mathematikstunden eintritt.

Ferner behandelt die darstellende Geometrie (und die synthetische Geometrie der Kegelschnitte) das Unterrichtswerk:

H. MÜLLER und A. HUPE, Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen, Ausgabe B, II, Abt. 2, Leipzig 1902.

(Bei der Gelegenheit sei, was überhaupt neuere mathematische Schulbücher betrifft, auch auf die anderen Teile des Lehrbuches von H. MÜLLER-Charlottenburg hingewiesen, ferner auf

stellenden Geometrie behandeln, werden in dem von Müller und Presler gerade die Anwendungen in vielseitigster Weise herangezogen und in den besonders beachtenswerten ausführlichen Anmerkungen viele historische Notizen und Literaturnachweise hinzugefügt.[1])

Gewiß wird es ja auch eine Aufgabe der darstellenden Geometrie sein, auf Grund wissenschaftlicher Regeln anschauliche Bilder von Gegenständen zu entwerfen, wie sie sich aus allen denkbaren Gebieten des uns umgebenden Lebens darbieten. Mit Recht haben daher Müller und Presler auch solche Beispiele in größerer Zahl in ihr Lehrbuch aufgenommen, z. B. im § 10, der zahlreiche Anwendungen aus der Botanik, Zoologie, Physik und Chemie bringt (Darstellung von Pflanzengeweben, physikalischen Apparaten usw.). Solche Aufgaben sind zweifellos auch für den Unterricht an den höheren Schulen überaus nützlich wegen der durch sie erreichten Verknüpfung der verschiedenen mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer. Wir wollen jedoch hier nur solche Anwendungen der darstellenden Geometrie besprechen, welche in derartig innigem logischen Zusammenhange mit den betreffenden Gebieten stehen, daß sie von deren Eigenart und Inhalt vollen Gebrauch machen. Das Studium dieser Gebiete selbst an den Figuren soll gerade die Anwendung darstellen.

Sie sehen hier zunächst die Überschriften der einzelnen Gebiete zusammengestellt, deren Beziehungen zur darstellenden Geometrie den Inhalt meiner Vorträge bilden sollen:

H. Müller und M. Kutnewsky, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie, 2 Teile, Leipzig 1900—1904 und

M. Schuster, Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie, 3 Teile, Leipzig 1901—1903 und Stereometrische Aufgaben mit besonderer Berücksichtigung der Methoden der darstellenden Geometrie, Leipzig 1901).

1) Besonderer Beachtung sei auch der ausführliche Prospekt zu dem genannten Buche von Müller und Presler empfohlen, der von B. G. Teubner-Leipzig unentgeltlich zu beziehen ist. — Es ist interessant, die Vorträge der Herren C. H. Müller-Frankfurt („Die Einführung stereometrischer Konstruktionen in den Gymnasialunterricht“) und O. Presler-Hannover („Die Ausbildung der Mathematiker im Zeichnen“) in dem „Bericht über die dritte Versammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften zu Wiesbaden“ (Stettin 1894) zu lesen und zu vergleichen, was von den dort aufgestellten Forderungen bislang erreicht ist.

I. *Stereometrie, projektive und analytische Geometrie.*
II. *Theoretische Kinematik.*
III. *Mechanik.*
IV. *Mathematische Physik.*
V. *Analysis und Algebra.*
VI. *Geodäsie.*
VII. *Astronomie und mathematische Geographie.*
VIII. *Kristallographie.*
IX. *Architektur.*
X. *Maschinenlehre.*
XI. *Ingenieurwissenschaften.*
XII. *Physiologie und Psychologie.*
XIII. *Kunst.*
XIV. *Photogrammetrie.*

Wie man sieht, behandeln die fünf ersten Gebiete in der Hauptsache die Beziehungen der darstellenden Geometrie zu theoretischen Fächern, während die übrigen den innigen Zusammenhang mit unmittelbar realen Verhältnissen in Wissenschaft und Leben darlegen sollen. Wir finden hier aufs schönste den Grundsatz zur Geltung kommen, daß im Unterricht nach Möglichkeit die einzelnen Disziplinen miteinander in beständige Beziehung gesetzt werden sollen.[1]) Im übrigen möchte ich in dem Sinne über die einzelnen Anwendungen berichten, daß Sie erkennen, wie sie in der Tat sämtlich in geeigneter Weise auch beim Unterricht in den höheren Schulen gute Verwendung finden können. Wenn ich gleichwohl nicht in einer Form Ihnen vortrage, wie letzteres unmittelbar durchzuführen ist, diese Umarbeitung für den Schulunterricht vielmehr Ihnen selbst überlassen möchte, so werden Sie gewiß dies aus vielerlei Gründen billigen. Denn bei allem Bestreben, möglichst einfach Ihnen vorzutragen, zumal ich ja speziellere Kenntnisse in den einzelnen Gebieten nicht voraussetzen kann, möchte ich nicht unterlassen, doch mannigfache Ausblicke auf höhere mathematische Fragen hinzuzufügen, die als Fortsetzung des Besprochenen sich darbieten, um Sie zu weiter-

1) Ich erwähne bei dieser Gelegenheit: P. CAUER (Düsseldorf), Palaestra vitae, eine neue Aufgabe des altklassischen Unterrichts (Berlin 1902), wo in analoger Weise die Beziehung des altsprachlichen Unterrichts zu den exakten Fächern herzustellen empfohlen wird (vgl. p. 27 des I. Teiles unseres Sammelbandes).

gehenden, mehr wissenschaftlichen Studien anzuregen. Denn dann erst wird der Lehrer mit Frische und Lebendigkeit zu unterrichten vermögen, wenn er aus dem Vollen schöpft, wenn er sich selbst bewußt ist, noch ein gutes Stück mehr zu wissen, als er dem Schüler mitteilt, wenn er womöglich selbst durch eigene wissenschaftliche Forschung an der Weiterführung der betreffenden Gebiete mitgearbeitet hat, obwohl er dann vielleicht gerade das Beste seines Wissens seinen Schülern vorenthalten muß. Es ist bekannt, daß gerade die bedeutendsten Meister ihres Faches auch die besten populären Vorträge gehalten haben.

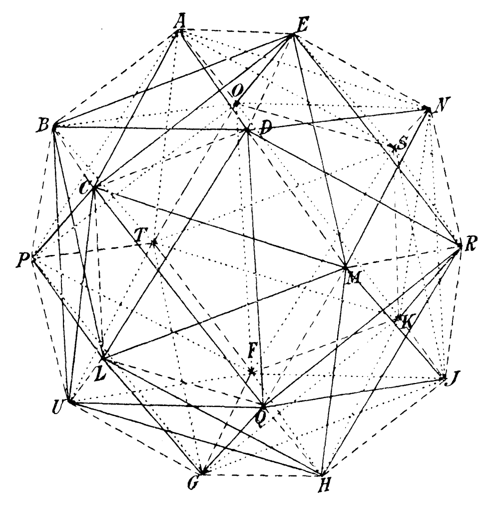
Natürlich werde ich wegen der Kürze der uns zur Verfügung stehenden Zeit von all den genannten Gebieten nicht im einzelnen ausführlich sprechen können. Ich möchte jedoch bei dem ersten und dem letzten Abschnitt wegen ihrer besonderen Eigenart länger verweilen, die übrigen aber insbesondere durch Behandlung bestimmter Beispiele, wobei der Projektionsapparat uns vortreffliche Dienste leisten wird, soweit durchsprechen, daß Sie klar erkennen, um was es sich handelt; außerdem werde ich stets, wo es möglich ist, ausführlich auf die Literatur verweisen.

I. Stereometrie, projektive und analytische Geometrie.

Wir wenden uns nun sogleich zu der Verknüpfung der darstellenden Geometrie mit den anderen geometrischen Disziplinen.

Die Beziehung zur Stereometrie ist ja bekannt, kann man doch die elementaren Teile der darstellenden Geometrie geradezu als konstruierende Stereometrie bezeichnen. Viele der schon oben genannten Veröffentlichungen (vgl. p. 8) aus Ihrem Kreise weisen auf diesen innigen Zusammenhang hin. Es sei hier aus früherer Zeit noch das vielbenutzte Buch erwähnt: G. Holzmüller, Einführung in das stereometrische Zeichnen, mit Berücksichtigung der Kristallographie und Kartographie (Leipzig 1886), das zwar keine darstellende Geometrie im gebräuchlichen Sinne, sondern nur eine Anleitung zum schnellen Zeichnen korrekter Figuren für die Schule geben will und als eine gute erste Einführung neben den oben genannten Werken über die darstellende Geometrie immer noch

Beachtung verdient.[1]) Als spezielles Beispiel möchte ich die Figur des Dodekaeders mit den fünf einbeschriebenen Würfeln Ihnen projizieren (Fig. 1), besonders um Sie bei dieser Gelegenheit auf das hier ausgestellte Stereoskopbild unserer Sammlung zum Vergleiche aufmerksam zu machen, das die in der ebenen Figur allein nicht sehr übersichtlichen Verhältnisse in ganz überraschend schöner Weise zur Anschauung bringt und damit zeigt, wie auch das Stereoskop zur Veranschaulichung geometrischer Verhältnisse oft recht nützlich ist.



Figur 1.

Auch die Verknüpfung von projektiver[2]) und darstellender Geometrie ist in allen wissenschaftlichen Lehrbüchern mehr oder minder ausführlich auseinandergesetzt; nennt sich doch z. B. das schon angeführte Werk von W. Fiedler geradezu „Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage“. Auch in meinen eigenen Vorlesungen sind darstellende und projektive Geometrie immer vereint zur Geltung gekommen[3]) (Aufgaben über Doppelverhältnisse, projektive Erzeugung der

---

1) Vgl. auch von demselben Verfasser das umfassende Werk: Elemente der Stereometrie, Bd. I—IV, Leipzig 1900—1902, sowie:

M. Brückner, Vielecke und Vielflache; Theorie und Geschichte, Leipzig 1900.

2) Von Lehrbüchern speziell der projektiven Geometrie nenne ich besonders:

Th. Reye, Die Geometrie der Lage, 3. Auflage, Leipzig 1886—1892;

F. Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie, deutsche Ausgabe von Dr. H. Fleischer, Leipzig 1903.

3) Vgl. die Inhaltsangabe meiner Vorlesungen in dem früheren Sammelbande von F. Klein und E. Riecke, l. c. p. 50—52. — Die Einführung der zeichnenden projektiven Geometrie in den Schulunterricht behandelt:

O. Lesser, Der Kegelschnitt als kollineare Kurve des Kreises unter besonderer Berücksichtigung der harmonischen Verwandtschaft, Programm, Frankfurt a. M. 1903.

Kegelschnitte, Polarentheorie, Involutionen, Kegelschnittbüschel u. dgl. m. wurden in den sich anschließenden Übungen behandelt).

Anders steht es mit der analytischen Geometrie, deren Verknüpfung mit der darstellenden Geometrie bisher noch nicht so weit durchgeführt zu sein scheint, wie ich es wünschen möchte. Es liegt dies wohl daran, daß die Vertretung der analytischen und der darstellenden Geometrie an den Technischen Hochschulen, wo seit der Lehrtätigkeit von MONGE († 1818) an der Polytechnischen Schule zu Paris[1]) vor allem die letztere Wissenschaft bis vor wenigen Jahren fast ausschließlich gepflegt wurde, in verschiedenen Händen liegt. Nur so ist es auch erklärlich, daß ein Studierender vom einschaligen Hyperboloid in der Vorlesung über darstellende Geometrie und von der Regelfläche 2. Grades in der Vorlesung über analytische Geometrie hörte, ohne zu der Erkenntnis zu kommen, daß es sich beide Male um dasselbe Objekt handelte. Es dürfte sich daher empfehlen, in den Vorlesungen über darstellende Geometrie wenige Stunden ihrer Beziehung zur analytischen Geometrie zu widmen, wie ich selbst in meinen Vorlesungen und Übungen es mit Erfolg erprobt habe im Anschluß an folgende Zusammenstellung von Aufgaben der analytischen Geometrie des Raumes und der Kegelschnittslehre, von denen ich dann gleich noch näher sprechen möchte:

Aufg. 1. Gegeben: Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes P. Gesucht: Der Radiusvektor r und dessen Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Beispiel: $x = 0,43$, $y = 0,32$, $z = 0,38$.

Aufg. 2. Gegeben: Der Radiusvektor r eines Punktes P und seine Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, sowie das Vorzeichen

---

1) GASPARD MONGE's Vorträge sind auch das erste zusammenfassende wissenschaftliche Lehrbuch über unsern Gegenstand; sie wurden zum ersten Male im Jahre 1795 nach einer stenographischen Aufzeichnung in dem Journal des Écoles normales Bd. I—IV gedruckt veröffentlicht unter dem Titel: Leçons de géométrie déscriptive, dem 1799 die erste Herausgabe in Buchform folgte. In Ostwalds Klassikern Nr. 117 (Leipzig 1900) ist dies Werk in deutscher Übersetzung von Hrn. R. HAUSSNER herausgegeben worden. Von nachfolgenden französischen Werken über darstellende Geometrie nenne ich C. F. A. LEROY (deutsch von E. F. KAUFFMANN, Stuttgart 1883, 3. Aufl.), TH. OLIVIER, J. DE LA GOURNERIE und A. MANNHEIM (vgl. die vortreffliche historische Einleitung in CHR. WIENER, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. 1, Leipzig 1884, p. 31 ff.).

von $\cos\gamma$. Gesucht: Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des Punktes P.

Beispiel: $r = 0{,}816$,

$\cos\alpha = 0{,}760$, $\cos\beta = 0{,}335$, $\cos\gamma = +\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$.

Aufg. 3. Gegeben: Der Radiusvektor r eines Punktes P und die (positiven oder negativen) Verhältniszahlen der Richtungskosinus $(\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : 1 = a : b : c : +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$. Gesucht: Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des Punktes P.

Beispiel: $r = 0{,}587$, $a = 7{,}33$, $b = 3{,}51$, $c = -6{,}73$.

Aufg. 4. Die wahre Entfernung s zweier durch ihre Koordinaten gegebenen Punkte P_1, P_2 und die Richtungskosinus ihrer Verbindungslinie $\overrightarrow{P_1 P_2}$ zu finden.

Beispiel: $x_1 = 0{,}098$, $y_1 = 0{,}315$, $z_1 = 0{,}522$,
$x_2 = 0{,}532$, $y_2 = 0{,}487$, $z_2 = 0{,}240$.

Aufg. 5. Die durch die Gleichung $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l$ gegebene Ebene $\mathfrak{H}$ darzustellen und ihre Achsenabschnitte u, v, w zu finden, wenn l, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ durch bestimmte Zahlwerte und das Vorzeichen von $\cos\gamma$ gegeben sind.

Beispiel: $l = 0{,}382$,

$\cos\alpha = 0{,}709$, $\cos\beta = 0{,}513$, $\cos\gamma = +\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$.

Aufg. 6. Die durch die Gleichung $ax + by + cz = d$ gegebene Ebene darzustellen, sowie die Achsenabschnitte u, v, w, die Länge l des vom Koordinatenanfangspunkte auf die Ebene gefällten Lotes und seine Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ zu finden.

Beispiel: $a = 67{,}6$, $b = 83{,}9$, $c = 56{,}6$, $d = 33{,}7$.

Aufg. 7. Die durch die Gleichungen

$$x = x_0 + s\cos\alpha,$$
$$y = y_0 + s\cos\beta,$$
$$z = z_0 + s\cos\gamma$$

gegebene Gerade g darzustellen und die Koordinaten x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, 3)$ ihrer Schnittpunkte G_1, G_2, G_3 mit den Koordinatenebenen zu bestimmen.

Beispiel:

$x_0 = 0{,}531$, $y_0 = 0{,}178$, $z_0 = 0{,}236$,

$\cos\alpha = 0{,}627$, $\cos\beta = 0{,}452$, $\cos\gamma = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$.

Aufg. 8. Den Kosinus des Winkels ϑ zu finden, den die positiven Richtungen der beiden durch denselben Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$



gehenden Geraden g und h miteinander bilden, wenn letztere durch die Gleichungen:

$$x = x_0 + s\cos\alpha_1,\quad x = x_0 + t\cos\alpha_2,$$
$$y = y_0 + s\cos\beta_1,\quad y = y_0 + t\cos\beta_2,$$
$$z = z_0 + s\cos\gamma_1,\quad z = z_0 + t\cos\gamma_2$$

gegeben sind.

Beispiel: $x_0 = 0{,}778,$
$y_0 = 0{,}612,$
$z_0 = 0{,}530,$

$\cos\alpha_1 = 0{,}550,$ $\cos\alpha_2 = -0{,}620,$
$\cos\beta_1 = 0{,}613,$ $\cos\beta_2 = 0{,}465,$
$\cos\gamma_1 = +\sqrt{1-\cos^2\alpha_1-\cos^2\beta_1},$ $\cos\gamma_2 = +\sqrt{1-\cos^2\alpha_2-\cos^2\beta_2}.$

Aufg. 9. Zwei Ebenen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ sind durch die Gleichungen:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{und} \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

gegeben. Man soll die Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihrer Schnittgeraden und deren Spurpunkte G_1, G_2, G_3 bestimmen.

Beispiel:

$a_1 = 0{,}211,$ $b_1 = 0{,}218,$ $c_1 = 0{,}375,$ $d_1 = 0{,}165,$
$a_2 = 0{,}366,$ $b_2 = -0{,}570,$ $c_2 = -0{,}138,$ $d_2 = 0{,}085.$

Aufg. 10. Zwei Ebenen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ sind durch die Gleichungen:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{und} \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

gegeben. Man soll den Kosinus des spitzen Winkels ϑ der beiden Ebenen bestimmen.

Beispiel:

$a_1 = 0{,}300,$ $b_1 = 0{,}268,$ $c_1 = 0{,}402,$ $d_1 = 0{,}240,$
$a_2 = 0{,}267,$ $b_2 = -0{,}302,$ $c_2 = -0{,}276,$ $d_2 = -0{,}115.$

Aufg. 11. Den Schnittpunkt P der drei Ebenen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

zu finden.

Beispiel:
$$20x + 21y + 49z = 17,$$
$$75x + 69y + 63z = 46,$$
$$15x - 40y - 18z = -8.$$

Aufg. 12. Gegeben: Zwei Geraden g, h durch die Gleichungen in Parameterdarstellung mit den Anfangspunkten $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$x = x_1 + s\cos\alpha_1, \quad y = y_1 + s\cos\beta_1, \quad z = z_1 + s\cos\gamma_1,$$
$$x = x_2 + t\cos\alpha_2, \quad y = y_2 + t\cos\beta_2, \quad z = z_2 + t\cos\gamma_2.$$

Gesucht sei:

1) der kürzeste Abstand $l = ST$ der Geraden,
2) die Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ von $\overrightarrow{ST}$,
3) die Parameter $s_0 = \overrightarrow{P_1S}$ und $t_0 = \overrightarrow{P_2T}$ der Fußpunkte S, T,
4) die Koordinaten (x_s, y_s, z_s) und (x_t, y_t, z_t) der Fußpunkte S, T.

Beispiel:

$$\cos\alpha_1 = 0,878, \quad \cos\beta_1 = 0,136, \quad \cos\gamma_1 = +\sqrt{1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\beta_1},$$
$$\cos\alpha_2 = 0,681, \quad \cos\beta_2 = 0,585, \quad \cos\gamma_2 = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha_2 - \cos^2\beta_2}.$$
$$x_1 = 2,019, \quad y_1 = 0,224, \quad z_1 = 0,517,$$
$$x_2 = 1,277, \quad y_2 = 0,212, \quad z_2 = 0,725.$$

Aufg. 13. Das Volumen V eines Tetraeders mit der Spitze im Koordinatenanfangspunkte zu bestimmen, wenn die Koordinaten der Basispunkte P_1, P_2, P_3 gegeben sind.

Beispiel:

$$x_1 = 0,371, \quad x_2 = 0,239, \quad x_3 = -0,154,$$
$$y_1 = 0,332, \quad y_2 = 0,062, \quad y_3 = 0,548,$$
$$z_1 = 0,140, \quad z_2 = 0,463, \quad z_3 = 0,377.$$

Aufg. 14. Gegeben: Zwei konjugierte Durchmesser $2u$ und $2v$ einer Ellipse und der Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels φ. Gesucht: Die Achsen $2a$ und $2b$ und der Kosinus des Neigungswinkels α der Achse $2a$ gegen den Durchmesser $2u$ (Ausziehen der Ellipse selbst).

Beispiel: $u = 0,392, \quad v = 0,453, \quad \cos\varphi = 0,477.$

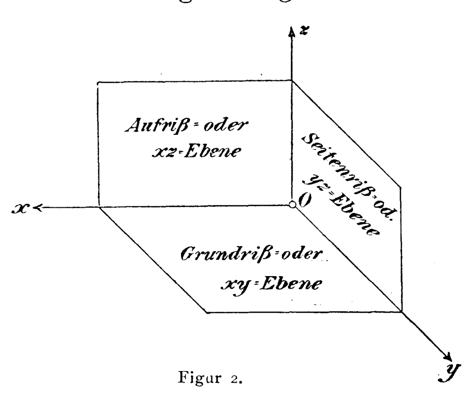
Aufg. 15. Von einem Punkte $P_0(x_0, y_0)$ an eine durch ihre Achsen $2a$ und $2b$ gegebene Ellipse (bez. Hyperbel) die Tangenten zu legen, ihre Richtungskosinus und die Koordinaten ihrer Berührungspunkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ zu bestimmen.

Beispiel:

für die Ellipse:	$a = 0,542,$	$x_0 = 0,160,$
	$b = 0,451,$	$y_0 = 0,676,$
für die Hyperbel:	$a = 0,204,$	$x_0 = 0,047,$
	$b = 0,150,$	$y_0 = 0,253.$

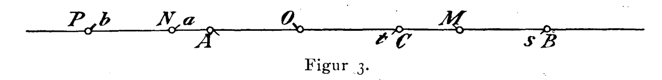
Bei der graphischen Lösung der Aufgaben wurde die gewöhnliche Methode der drei Tafeln angewandt; die Grundriß-,

Aufriß- und Seitenrißebene wurden bez. als xy-, xz- und yz-Ebene gewählt (Fig. 2). Längs der y-Achse denken wir die räumliche Figur aufgetrennt und die drei Koordinatenebenen in die Zeichenebene ausgebreitet, sodaß die y-Achse dann doppelt auftritt. Wir wollen die nach der Umklappung zur x-Achse normale als die e r s t e, die zur z-Achse normale als die z w e i t e Lage der y-Achse bezeichnen.



Figur 2.

Die Zahlenbeispiele sind sämtlich so gewählt, daß für die Zeichnung auf dem Reißbrett als Längeneinheit 1 dcm zu nehmen sich empfiehlt; sind beliebige andere Beispiele in Zahlen gegeben, so wird man zunächst natürlich eine geeignete Einheit festsetzen müssen. Auch ist die Anwendung des Winkelmessers (Transporteurs) vermieden, da gute, der Benutzung des Lineals und des Zirkels an Genauigkeit gleichkommende Instrumente für den Schüler zu teuer sind. Die durch Konstruktion gefundenen Werte wurden mit den aus den zugehörigen analytischen Formeln berechneten allemal verglichen, wie dies auch in den folgenden verkleinerten Figuren 4—7 geschehen ist. Um ferner verschiedene gegebene oder gesuchte Strecken auf derselben Geraden kurz bezeichnen zu können, wie es immerfort beim Auszeichnen dieser Konstruktionen wünschenswert ist, schlage ich vor, die Endpunkte der einzelnen Strecke mit zwei entgegenlaufenden gleichen Haken zu versehen und neben den einen die Bezeichnung der Strecke zu schreiben. So bedeuten in der Figur 3



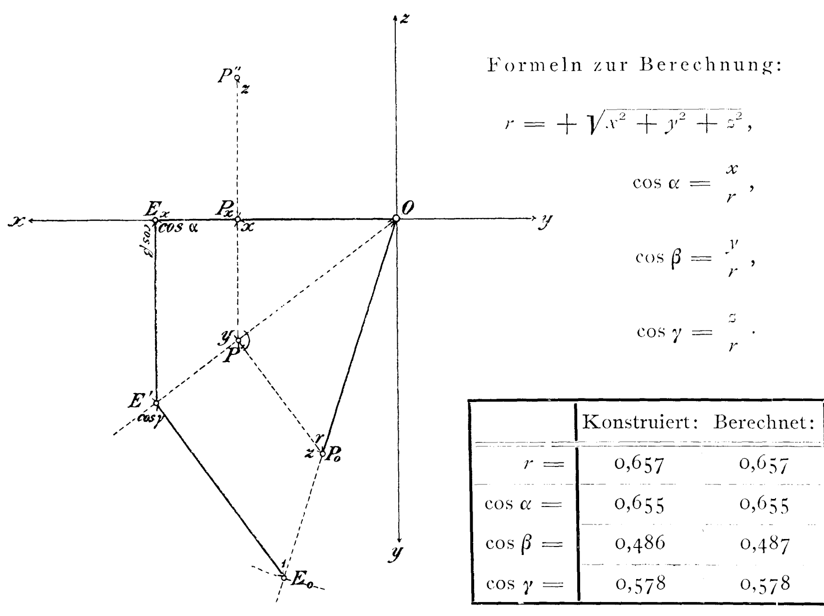
Figur 3.

a, b, s, t bez. die Strecken MN, OP, AB und AC. Die Endpunkte gemessener Strecken werden stets durch Nullenkreise ausgezeichnet.

Damit Sie von der Art dieser Aufgaben eine noch bessere Vorstellung erhalten, möchte ich die grundlegenden Aufgaben der obigen Zusammenstellung, die sich auf die Konstruktionen

des Punktes, der Ebene und der Geraden beziehen, hier an der Tafel vor Ihnen durchführen.

Aufgabe 1. Wir tragen (Fig. 4) vom Koordinatenanfangspunkt aus auf der x-Achse die gegebene x-Koordinate des Punktes P gleich $\overrightarrow{OP_x}$ ab, von P_x aus parallel zur ersten y-Achse die gegebene y-Koordinate gleich $\overrightarrow{P_x P'}$ und von dem-



	Konstruiert:	Berechnet:
$r =$	0,657	0,657
$\cos\alpha =$	0,655	0,655
$\cos\beta =$	0,486	0,487
$\cos\gamma =$	0,578	0,578

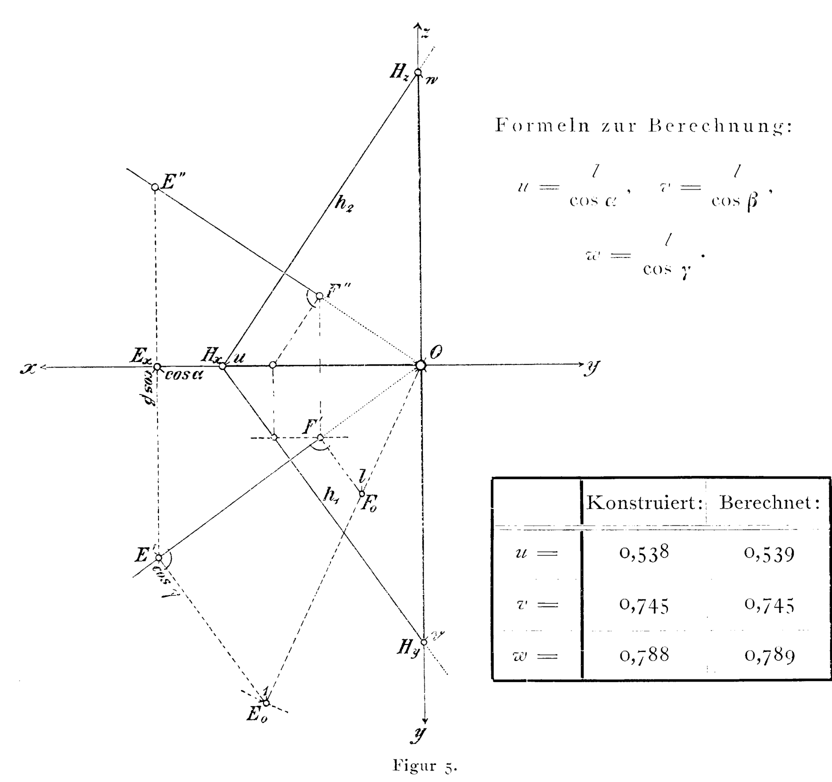
Figur 4.

selben Punkte aus parallel zur z-Achse die z-Koordinate gleich $\overrightarrow{P_x P''}$. Die Umlegung $OP'P_0$ des bei P' rechtwinkligen Dreiecks $OP'P$ um OP' in die Zeichenebene ist durch $P'P_0 = z$ bestimmt. OP_0 ist dann die wahre Länge des Radiusvektors r. Bezeichnet man ferner den Endpunkt der auf dem Vektor von O aus abgetragenen Einheitsstrecke als „Einheitspunkt“ E, so gilt der Satz: Die Koordinaten des Einheitspunktes sind die Richtungskosinus des Radiusvektors. Wir tragen daher auf OP_0 von O aus die Einheit gleich $\overrightarrow{OE_0}$ ab; das Lot von E_0 auf OP' liefert E', das Lot von E' auf die x-Achse E_x. Die so erhaltenen Strecken $\overrightarrow{OE_x}$, $\overrightarrow{E_x E'}$, $\overrightarrow{E' E_0}$, mit den richtigen Vorzeichen versehen und mit der Einheitsstrecke gemessen, geben dann die gesuchten Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Zusatz. Was die Umkehrung der Aufgabe 1 betrifft, so ist daran zu erinnern, daß die Richtungskosinus an die Bedingung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

geknüpft sind. Dementsprechend kann außer dem Radiusvektor r etwa $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und das Vorzeichen von $\cos\gamma$ (Aufg. 2) oder r und die durch drei mit Vorzeichen versehene Strecken a, b, c gegebenen Verhältnisse $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ vorgegeben sein (Aufg. 3). Die Konstruktion dieser Aufgaben verläuft übrigens ganz analog wie die der Aufgabe 1.



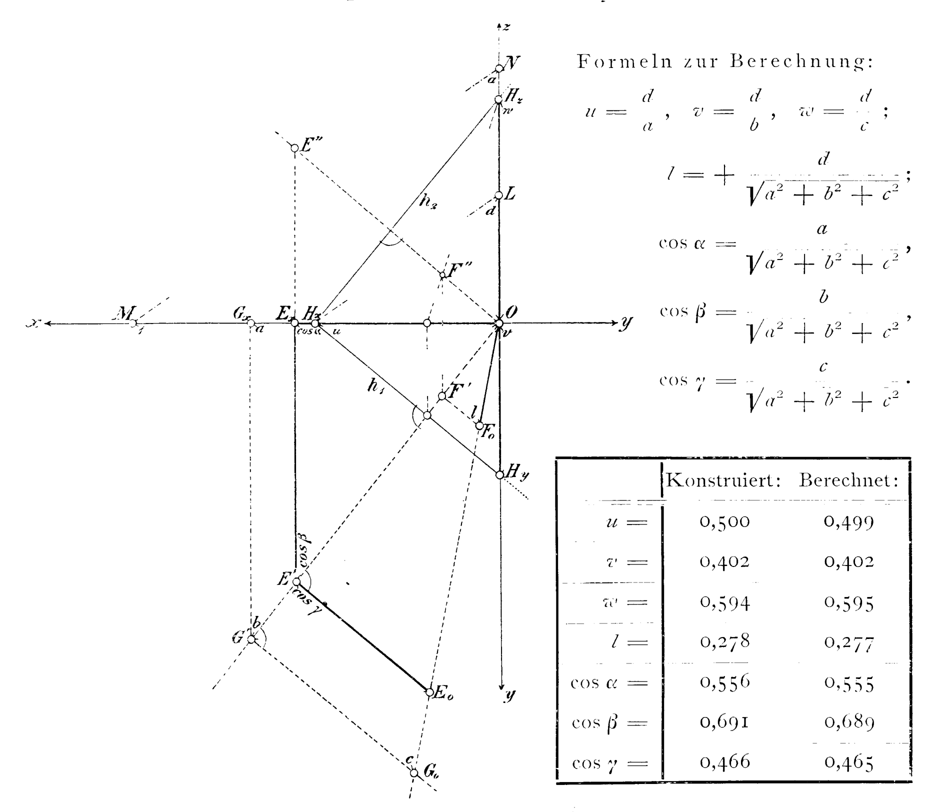
	Konstruiert:	Berechnet:
$u =$	0,538	0,539
$v =$	0,745	0,745
$w =$	0,788	0,789

Figur 5.

Aufgabe 5. Wir konstruieren (Fig. 5) $\overrightarrow{OE_x} = \cos\alpha$, $\overrightarrow{E_xE'} = \cos\beta$, bestimmen E_0 durch $E'E_0 \perp OE'$ und $OE = 1$ und ziehen $\overrightarrow{E_xE''} = \overrightarrow{E'E_0}$ parallel zur z-Achse. $\overrightarrow{OE'}$, $\overrightarrow{OE''}$ sind dann der Richtung nach die Projektionen des Lotes vom Koordinatenanfangspunkt auf die Ebene. Die von O auf OE_0 abgetragene Länge l des Lotes liefert im Endpunkt F_0 den umgelegten Fuß-

punkt, aus dem unmittelbar seine Projektionen F' und F'' sich ergeben. Alsdann ist die Hilfsaufgabe auszuführen: In dem Endpunkt (F', F'') einer vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Strecke auf dieser die senkrechte Ebene zu errichten. In der Figur 5 sind h_1 und h_2 die Spuren dieser Ebene und $\overrightarrow{OH_x} = u$, $\overrightarrow{OH_y} = v$, $\overrightarrow{OH_z} = w$ die gesuchten Achsenabschnitte.

Aufgabe 6. Man trage (Fig. 6) von O aus auf der x-Achse $\overrightarrow{OG_x} = a$, von G_x parallel zur ersten y-Achse $\overrightarrow{G_x G'} = b$, von



Formeln zur Berechnung:

$$u = \frac{d}{a}, \quad v = \frac{d}{b}, \quad w = \frac{d}{c};$$

$$l = +\frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

	Konstruiert:	Berechnet:
$u =$	0,500	0,499
$v =$	0,402	0,402
$w =$	0,594	0,595
$l =$	0,278	0,277
$\cos\alpha =$	0,556	0,555
$\cos\beta =$	0,691	0,689
$\cos\gamma =$	0,466	0,465

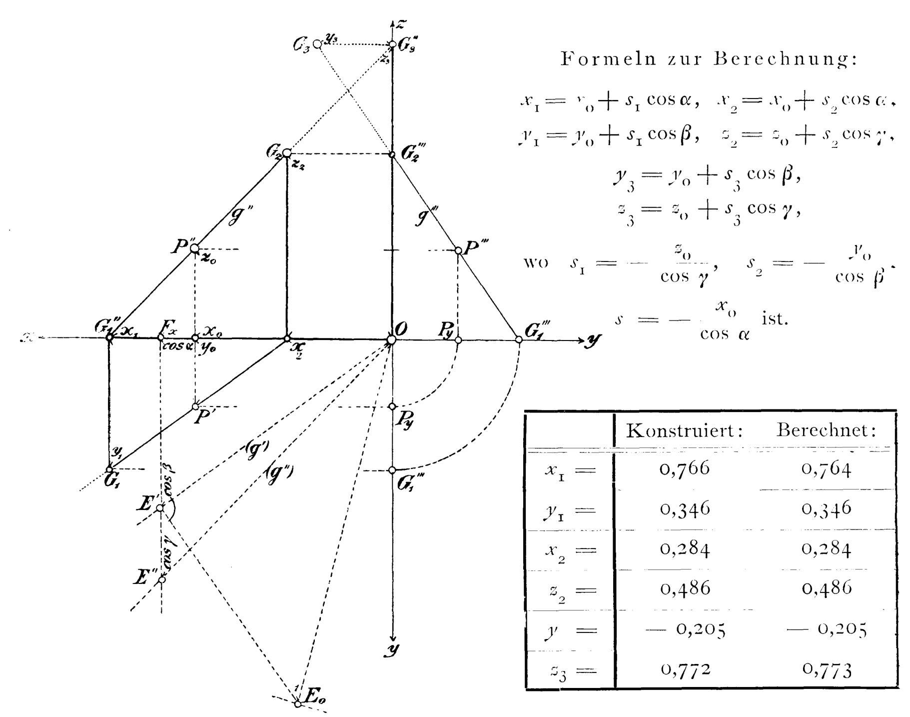
Figur 6.

G' zu OG' senkrecht $\overrightarrow{G'G_0} = c$ und endlich auf OG_0 die Einheitsstrecke $\overrightarrow{OE_0}$ ab. Von diesem umgelegten Einheitspunkt E_0 ausgehend, findet man die erste und die zweite Projektion, E' und E''; $\overrightarrow{OE'}$ und $\overrightarrow{OE''}$ sind wieder die Richtungen des Lotes vom Koordinatenanfangspunkt auf die Ebene und $\overrightarrow{OE_x}$, $\overrightarrow{E_x E'}$, $\overrightarrow{E'E_0}$ seine gesuchten Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Der

durch die Formel

$$u = \frac{d}{a}$$

bestimmte Achsenabschnitt $u = \overrightarrow{OH_x}$ der x-Achse ergibt sich dann also als vierte Proportionale zu der in der Figur auf der x-Achse abgetragenen Einheitsstrecke $\overrightarrow{OM}$ und den auf der z-Achse abgetragenen Strecken $\overrightarrow{ON} = a$, $\overrightarrow{OL} = d$, indem man



Formeln zur Berechnung:

$$x_1 = x_0 + s_1 \cos\alpha, \quad x_2 = x_0 + s_2 \cos\alpha,$$
$$y_1 = y_0 + s_1 \cos\beta, \quad z_2 = z_0 + s_2 \cos\gamma,$$
$$y_3 = y_0 + s_3 \cos\beta,$$
$$z_3 = z_0 + s_3 \cos\gamma,$$

wo $s_1 = -\frac{z_0}{\cos\gamma}, \quad s_2 = -\frac{y_0}{\cos\beta},$

$s = -\frac{x_0}{\cos\alpha}$ ist.

	Konstruiert:	Berechnet:
$x_1 =$	0,766	0,764
$y_1 =$	0,346	0,346
$x_2 =$	0,284	0,284
$z_2 =$	0,486	0,486
$y =$	— 0,205	— 0,205
$z_3 =$	0,772	0,773

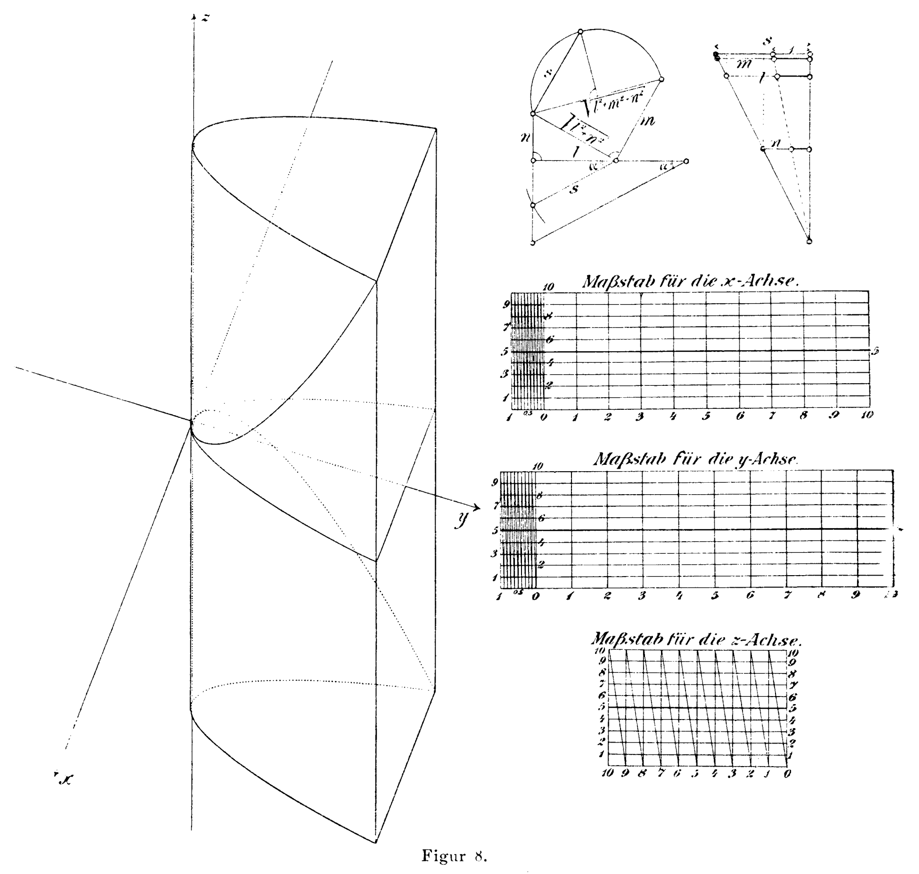
Figur 7.

LH_x NM zieht. Die beiden Spuren $h_1 = H_x H_y$ und $h_2 = H_x H_z$ sind die Lote von H_x auf OE' und OE''. $\overrightarrow{OH_x}$, $\overrightarrow{OH_y}$, $\overrightarrow{OH_z}$ geben wieder die gesuchten Abschnitte u, v, w.

Zusatz. Analog wie u ließen sich auch die Achsenabschnitte v und w direkt bestimmen, was die Konstruktion vereinfacht, wenn nur diese Stücke gesucht sind.

Aufgabe 7. Grund- und Aufriß des Anfangspunktes P der Geraden mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 (Fig. 7) werden wie in Aufg. 1 konstruiert; aus ihnen ergibt sich der Seitenriß P'''. Dann bestimme man die erste Projektion E' des Einheitspunktes

aus den gegebenen Koordinaten $\cos\alpha$ und $\cos\beta$, darauf seine Umlegung E_0, wobei $E_0E' \perp OE'$ und $\overrightarrow{OE_0} = 1$ ist; $\overrightarrow{E'E_0} = \overrightarrow{E_xE''}$ liefert die zweite Projektion E''. $\overrightarrow{OE'} = (g')$, $\overrightarrow{OE''} = (g'')$ geben alsdann die Projektionen der als positiv ausgezeichneten Richtung der Geraden, zu denen bez. durch P' und P'' die Parallelen gezogen werden. Man konstruiere noch die erste und die zweite

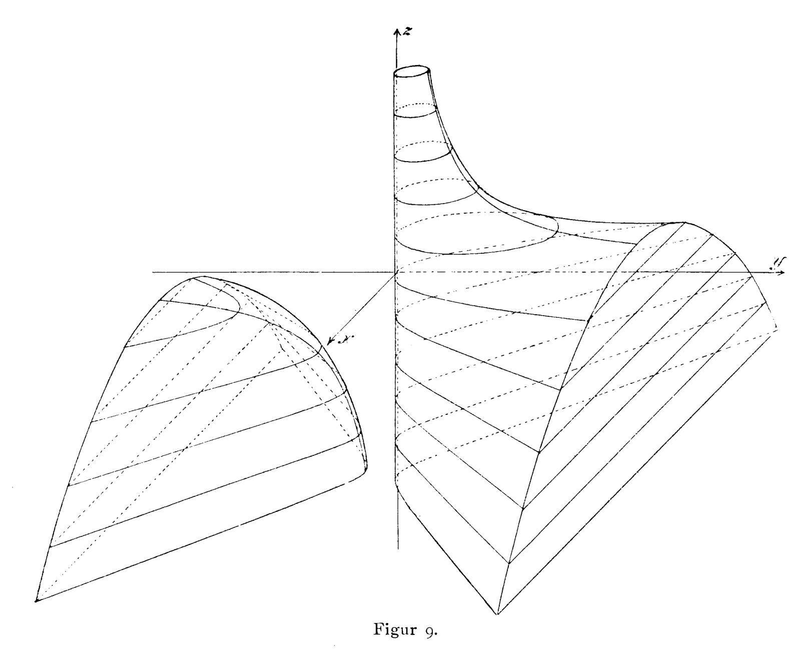


Figur 8.

Spur G_1 und G_2 und auf der sich sofort ergebenden dritten Projektion g''' der Geraden ihre dritte Spur G_3. Die Koordinaten $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, 0, z_2)$, $(0, y_3, z_3)$ dieser Spurpunkte sind direkt aus der Figur zu entnehmen.

Was die übrigen Aufgaben angeht, so möchte ich mich damit begnügen, Sie auf die hier ausgelegten exakt ausgeführten Zeichnungen einiger meiner Schüler hinzuweisen. Doch möchte ich noch eine Reihe einzelner Bemerkungen anschließen.

Wie wir bisher die Methode des Grund- und Aufrisses bevorzugt haben, so lassen sich in gleicher Weise natürlich auch die orthogonale Axonometrie und die Kavalierperspektive bei solchen Aufgaben mit Vorteil verwenden. Ferner ist es klar, daß sich ebenso leicht eine große Reihe von Aufgaben der analytischen Geometrie der Ebene zusammenstellen läßt, die sich auf Punkte und Gerade beziehen und die ebenso wie die Beispiele aus der Kegelschnittslehre für den Schulunterricht besonders in Betracht kommen. Andrerseits kann



Figur 9.

man natürlich auch aus den höheren Gebieten der analytischen Geometrie solche in gleicher Weise zu lösende Beispiele wählen. Ich erinnere an die Benutzung homogener Koordinaten, an die Linien- und Kugelgeometrieen, an die Theorie der Raumkurven und Flächen. Als Beispiele seien die folgenden Aufgaben erwähnt:

1) Die Raumkurve dritter Ordnung $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ auf ihrem parabolischen Zylinder darzustellen (Fig. 8, Methode der orthogonalen Axonometrie, Annahme der Verkürzungsverhältnisse $l : m : n = 9 : 10 : 5$; $s = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$, $\frac{l}{s} = \cos \alpha$).

2) Eine der durch die Gleichungen

$$\text{a)} \qquad z = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^2}$$

(Fig. 9, Methode der Kavalierperspektive),

$$\text{b)} \quad xyz = 1$$

gegebenen Flächen durch Zeichnung ihrer Schnitte parallel zur xy-Ebene und ihrer Durchdringungskurven mit den drei Koordinatenebenen darzustellen.

3) Die durch die Gleichung

$$z = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2}$$

gegebene Fläche durch Konstruktion ihrer Schnitte parallel zur xz-Ebene darzustellen.[1])

Hinsichtlich der didaktischen Vorteile, welche die Einführung solcher Aufgaben zur Verknüpfung der analytischen und der darstellenden Geometrie gewährt, gilt hier wie überall, daß die Beziehung verschiedener Disziplinen aufeinander zweifellos zur Übersichtlichkeit und Klarheit jeder einzelnen beiträgt. Es ist in diesem Sinne für den Schüler gewiß interessant, an sich selbst zu beobachten, wie zwischen den verschiedenen Teilen der Geometrie, die bisher gleichsam getrennte Kammern des Gehirns bewohnten, nun die trennende Wand eingerissen wird, und sich der dabei sich vollziehenden Tätigkeit des Verstandes bewußt zu werden. Hervorheben will ich weiter noch, wie interessante Aufgaben und Methoden in der darstellenden Geometrie durch ihre Verbindung mit der analytischen Geometrie gewonnen werden[2]), wie die Zeichenübungen der darstellenden Geometrie dann zugleich Übungsstunden für die analytische Geometrie sind, wie man vielleicht bei gegebenen Aufgaben dieser Art sich graphisch helfen kann, falls man etwa eine Logarithmentafel nicht zur Hand hat.

Den wichtigsten Vorteil sehe ich indessen in der durch diese Aufgaben erreichten Kontrolle der Genauigkeit des Zeich-

1) Vgl. L. Marc, Sammlung der Aufgaben aus der höheren Mathematik, technischen Mechanik und darstellenden Geometrie, welche bei der Vorprüfung an der Technischen Hochschule in München gestellt sind, München 1901, p. 21 u. 23. — Auch auf die Methode der kotierten Projektionen (vgl. p. 60) zur Darstellung solcher Flächen sei hier hingewiesen.

2) Das Umgekehrte gilt natürlich, wenn man in der analytischen Geometrie gewisse Aufgaben zu lösen sucht, welche die darstellende Geometrie darbietet.



nens. Es ist zweifellos wünschenswert, in der darstellenden Geometrie Aufgaben zu besitzen, bei denen die Exaktheit der Zeichnung sich durch gleichzeitige Rechnung kontrollieren läßt. Schon längst hat man ja eine Fehlertheorie für die graphischen Methoden, wie sie für die Rechnung die Methode der kleinsten Quadrate bildet, entbehrt, d. h. eine auf gewissen Hypothesen sich aufbauende Aufstellung bestimmter Theoreme, welche die Genauigkeit einer Zeichnung, die durch die Zeichnung erreichte Annäherung an die Wirklichkeit, zu bestimmen gestattet. Seit 1888 ist die „Géométrographie“ von M. E. LEMOINE[1]) entwickelt. Sie beruht in ihrem Wesen darauf, in bestimmter Weise abzuzählen, wie oft der Zirkel und das Lineal bei der Konstruktion benutzt werden; die dabei sich ergebenden Ziffern sollen ein Maß für die Genauigkeit („coefficient d'exactitude“) und die Einfachheit („coefficient de simplicité“) der Zeichnung sein. Auch von Seiten der Gymnasiallehrer ist in den letzten Jahren viel über die Géométrographie geschrieben worden, oft mit großer Zustimmung.[2]) Doch liegt auf der Hand, daß es sich nur um eine oberflächliche Abzählung handelt, welche der Ausführung der einzelnen Konstruktion, der verschiedenen Möglichkeit, die gegebenen Stücke zu wählen, gar nicht gerecht wird. Ist es doch gewiß z. B. nicht einerlei, unter

1) Ich verweise auf die Einzelabhandlung:

M. E. LEMOINE, La géométrographie ou l'art des constructions géométriques (Berichte der „Association française pour l'avancement des sciences“ 1892) und die zusammenfassende Darstellung in der Sammlung „Scientia“, Phys. mathématique No. 18 (Paris 1902, Verlag G. Naud).

2) R. GÜNTSCHE (Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Jahrgang VIII, 1902, p. 61—64 u. 82—83) äußert mit Nachdruck den Wunsch, „daß man von dem klaren, wohldurchdachten und wohlerprobten LEMOINEschen Verfahren nicht abgehe“, vgl. noch u. a.:

L. LEISEN, Relative Einfachheit und Genauigkeit geometrischer Konstruktionen, Unterrichtsblätter usw. 1902, p. 35—38;

H. BODENSTEDT, Geometrographie, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 1903, p. 32—35, sowie Verhandlungen der 47. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Halle a. S. (Leipzig 1904, p. 155ff.) und Geometrographische Fünf- und Zehneckskonstruktionen, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Jahrgang X, 1904, p. 56—59.

Ferner sehe man

R. MEHMKE, Bemerkungen zur Geometrographie von M. E. LEMOINE, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XII, Leipzig 1903, p. 113—116.

welchem Winkel zwei gerade Linien sich schneiden, oder wie nahe zwei zu verbindende Punkte liegen.[1]) Bei der Géométrographie von LEMOINE kann es sich also um eine exakte Fehlertheorie nicht handeln. Ansätze zu einer solchen gibt z. B. F. KLEIN in seiner Vorlesung „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie, eine Revision der Prinzipien" S.S. 1901 (Leipzig 1902, Autogr., p. 358 ff.).[2])

1) Beachtenswerte Winke, wie man in solchen Fällen die Genauigkeit der Konstruktion erhöhen kann, ferner wie man etwa außerhalb der Zeichenebene gelegene Punkte zur weiteren Konstruktion benutzt, gibt

A. WITTING, Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene, Jahresbericht des Gymnasiums zum heiligen Kreuz in Dresden, 1899.

2) Die Gedanken von Herrn F. KLEIN sind dann weiter ausgeführt in der Göttinger Dissertation: P. BÖHMER, Über geometrische Approximationen, Berlin 1904. Vgl. ferner

S. FINSTERWALDER, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VI, 1897, p. 40. („Während man bei den einfachsten geodätischen Messungen Fehlergrenzen berücksichtigt, ihren Einfluß auf das Resultat untersucht und hiernach die Methode beurteilt, gilt für graphische Konstruktionen nur die eine Maxime: „Zeichne so genau wie möglich und traue dem Resultat so wenig wie möglich." Dennoch ist eine Fehlertheorie der graphischen Konstruktionen nicht nur möglich, sondern sie kann sogar im engen Anschluß an dieselben auf geometrischem Wege entwickelt werden.")

G. HAUCK, Über angewandte Mathematik, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, III. Jahrgang, p. 7—8, Beilage zum Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, VII. Band, Leipzig 1903. („Auch darauf muß besonderes Gewicht gelegt werden, daß der Schüler zur Gewissenhaftigkeit und Genauigkeit sowohl in der rechnerischen als in der graphischen Ausführung der Lösungen erzogen werde. Es genügt nicht, ihm einzuschärfen, daß er überhaupt genau rechnen und konstruieren müsse. Sondern es ist ihm der Grad der Genauigkeit vorzuschreiben, innerhalb dessen er sich zu bewegen hat und dessen Einhaltung er beständig kontrollieren muß. Dieser Grundsatz scheint mir von größerer Wichtigkeit zu sein als der zur Zeit viel gepflegte geometrographische Gesichtspunkt. Für die Genauigkeit einer geometrischen Konstruktion kommen ganz andere Momente in Betracht als der sogenannte Genauigkeitskoeffizient (coefficient d'exactitude) der Geometrographie.")

Was die zur Genauigkeit des Zeichnens in engster Beziehung stehende Genauigkeit des Messens betrifft, so vergleiche man ebenfalls die im Text genannte Vorlesung des Herrn F. KLEIN, p. 328—358, ferner die auf wesentlich geometrischer Betrachtungsweise beruhenden sehr eingehenden Untersuchungen in W. JORDAN, Handbuch der Vermessungskunde, Bd. I, 3. Aufl. Stuttgart 1888, p. 296—361 (Kap. V, Theorie der Genauigkeit der geodätischen Punktbestimmung), sowie

Die bei unsern Aufgaben durchgeführte Methode, die graphisch bestimmten Werte mit den berechneten zu vergleichen, will naturgemäß auch nicht den Anspruch erheben, die gewünschte Fehlertheorie zu sein, aber darin möchte ich ihren nicht zu unterschätzenden Vorteil erblicken, daß sie jedem Schüler ermöglicht, sich ein klares Urteil zu bilden, wie genau er seiner Individualität und seinem Zeichenmaterial entsprechend zu zeichnen vermag. Ich will erwähnen, daß bei den Ihnen vorliegenden Zeichnungen meiner Schüler die Abweichungen der konstruierten Werte von den berechneten meist nicht mehr als 0,2 mm in dem Maßstab der Zeichnung betrugen.

Eine mehr äußerliche Verknüpfung der analytischen und der darstellenden Geometrie würde bei solchen Aufgaben statthaben, bei denen es sich darum handelt, anschauliche und dabei doch exakte Figuren für die Lehrsätze der analytischen Geometrie zu gewinnen. So enthält z. B. besonders schön gezeichnete Figuren das „Lehrbuch der analytischen Geometrie" von F. Schur, das überhaupt wohl für Studierende die beste elementare Einführung in die analytische Geometrie in deutscher Sprache sein dürfte.[1]) Es kann jedoch nicht stark genug getadelt werden, daß in den geometrischen Lehrbüchern noch immer völlig falsch gezeichnete Figuren sich finden. Ich verweise z. B. auf die falsche Figur 53 des zweiten Bandes von dem viel verbreiteten Werk O. Fort und O. Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie (6. Aufl., Leipzig 1898, p. 233). Ein erfreulicher Fortschritt in der Zeichnung der Figuren macht sich allerdings in den letzten Jahren vielfach bemerkbar; man vergleiche z. B. die 6. Auflage des „Leitfadens der Elementarmathematik" von H. Lieber und F. von Lühmann, III. Teil (Berlin 1892), in der die Ellipsen einfach durch zwei sich schneidende Kreisbogen dargestellt sind[2]), mit der 11., von

F. Strehlow, Winkel- und Streckengenauigkeit und ihr Verhältnis, Dissertation, Rostock 1903.

1) Daneben sei für diesen Zweck das französische Buch genannt: C. Briot et J. C. Bouquet, Leçons de géométrie analytique, Paris, 17. Aufl. 1901.

2) Eine solche schematische Zeichnung ist durch keinerlei Gründe zu rechtfertigen. Ebenso könnte man die Hyperbel in ihrem ganzen Verlaufe durch zwei gegeneinander konvexe Kreisbogen darstellen wollen oder ein Verbum der dritten Konjugation einstweilen nach der zweiten abändern lassen, weil der Schüler die dritte noch nicht gelernt hat.

Herrn C. Müsebeck besorgten Auflage (Berlin 1903). Indes enthält auch diese neue Auflage noch manche fehlerhafte Figuren, z. B. gilt dies für die Fig. 57—59 (p. 115ff.) und Fig. 34—36 (p. 179ff.). Und dabei hat der Verfasser selber unmittelbar vor den Fig. 57—59 die zu ihrer Zeichnung erforderlichen Regeln der darstellenden Geometrie auseinandergesetzt!

Endlich möchte ich noch einmal auf die „Darstellende Geometrie" von Chr. Beyel zurückkommen (vgl. p. 9). Auch dort wird die analytische Geometrie herangezogen, nämlich, um durch Zahlenangaben (Koordinaten der Punkte und Ebenen) die gegebenen Stücke festzulegen. Die gewiß anzuerkennenden Vorteile, welche der Verfasser durch eine solche Verknüpfung der analytischen mit der darstellenden Geometrie erreicht, gipfeln darin, beim Schüler „eine gute Anordnung der Konstruktion zu erreichen, welche innerhalb des bei der Zeichnung zur Verfügung gestellten Raumes bleibt, das sinnlose Kopieren dadurch zu vermeiden, daß verschiedenen Schülern verschiedene Daten überwiesen werden können". So erklärt sich auch die große Zahl von 1800 Aufgabendispositionen dieses Werkes.

Zweite Vorlesung.

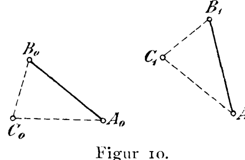
Der heutige Vortrag soll der Besprechung der in unserer gestrigen Zusammenstellung unter Nr. II—XIII aufgeführten Anwendungsgebiete der darstellenden Geometrie gewidmet sein. Wenn ich auch besonders den Standpunkt der höheren Schulen hierbei im Auge behalte, möchte ich doch, wie ich schon erwähnte, nicht unterlassen, höhere Ausblicke zu geben und sie durch Angabe der wissenschaftlichen Literatur zu stützen. Wir besprechen nun sogleich die

II. Reine Kinematik oder geometrische Bewegungslehre.

Es handelt sich hier nicht wie bei Euklid um Untersuchungen an starren Figuren, sondern zu dem Raum tritt die Zeit als Parameter hinzu. Die Figur ändert sich mit der Zeit, Bewegung, Leben kommt in sie hinein. Leicht gewinnt man daher auch Beziehung zum Funktionsbegriff und weiter durch den Begriff der Geschwindigkeit zur Differentialrechnung. Das Fundament dieser Betrachtungen bildet die Theorie von der Zusammensetzung und der Zerlegung der einfach-

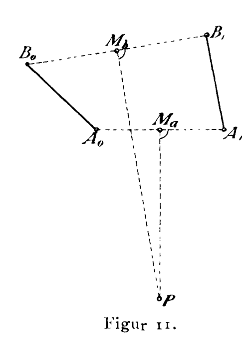
sten Bewegungsformen in der Ebene und im Raum, der Translationen, Drehungen und Schraubungen.[1])

Einige wenige einfachste Sätze der Kinematik der Ebene möchte ich anführen, damit Ihnen deutlicher wird, was hier gemeint ist.



Figur 10.

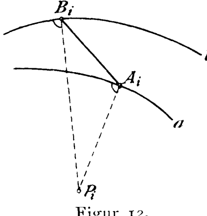
(1) Die Bewegung eines in sich starren ebenen Systems Σ ist bestimmt durch die Bewegung einer ihm angehörenden Strecke AB. Denn ist $A_0 B_0$ die Anfangs- und $A_1 B_1$ die Endlage der Bewegung, so ist damit auch zu jedem beliebigen Punkt C, der durch seine Anfangslage C_0 bestimmt ist, die Endlage C_1 gegeben ($\triangle A_0 B_0 C_0 \sim \triangle A_1 B_1 C_1$, Fig. 10).



Figur 11.

(2) Die Anfangslage $A_0 B_0$ einer Strecke läßt sich in ihre Endlage $A_1 B_1$ stets durch Drehung um den Schnittpunkt P der Mittentransversalen $M_a P$ und $M_b P$ von $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ durch den Winkel $A_0 \widehat{P} A_1 = B_0 \widehat{P} B_1$ überführen (Fig. 11). Der Punkt P wird „Pol" genannt. Stets dann und nur dann liegt er im Unendlichen, wenn $A_0 B_0 \parallel A_1 B_1$ ist. In diesem Fall ist die Drehung in eine bestimmte Translation übergegangen.

Weitere Folgerungen dieser beiden Sätze führen dazu, eine beliebige Bewegung während ihres ganzen Verlaufes zu untersuchen.



Figur 12.

(3) Nach dem Satze (1) beschreiben die Endpunkte A, B der Strecke bei einer gegebenen Bewegung Bahnkurven a, b, deren Punkte A_i, B_i wieder in bestimmter Weise dadurch zugeordnet sind, daß durch $A_i B_i$ die einzelnen Lagen der Strecke während der Bewegung angegeben werden (Fig. 12).

[1]) Die Theorie der Zusammensetzung und Zerlegung unendlich kleiner Bewegungen im Raume führt insbesondere zur Theorie des Nullsystems und der Schraubentheorie. Vgl. das umfassende Werk von R. Ball, A treatise on the theory of screws, Cambridge 1900, sowie das Referat von Hrn. F. Klein, Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball, Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 47, 1902, p. 237—265.

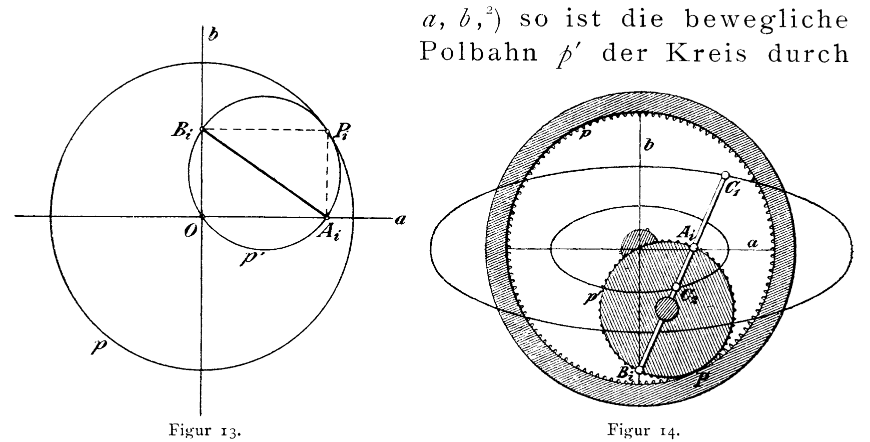
(4) Der Schnittpunkt P_i der Normalen der Bahnkurven a, b in den (nicht singulären) Punkten A_i, B_i, der sog. „momentane Pol“, ist dadurch ausgezeichnet, daß bei einer Drehung um ihn die Punkte A_i, B_i Kreisbogen beschreiben, deren Tangenten mit denen der Bahnkurven a, b zusammenfallen. Die Strecken A_iP_i und B_iP_i sind also proportional den Geschwindigkeiten, mit denen die Endpunkte der Strecke A_iB_i sich bewegen (Fig. 12).

Die Fortsetzung dieser Betrachtungen führt schließlich zu dem Satze:

(5) Jede vorgegebene Bewegung eines ebenen Systems Σ läßt sich dadurch erzeugen, daß eine mit Σ unverändert verbundene „Polbahn“ p' auf einer absolut festen Polbahn p ohne Gleiten abrollt.[1]

Ich kann diesen Satz an einigen einfachen Beispielen mit zugehörigen Modellen veranschaulichen.

(6) Sind die Bahnkurven für die Endpunkte der Strecke AB zwei unter 90° sich schneidende Gerade a, b,[2] so ist die bewegliche Polbahn p' der Kreis durch A, B und den Schnittpunkt O der Geraden und die feste Polbahn p der Kreis mit doppeltem Radius um O (Fig. 13).



Figur 13. Figur 14.

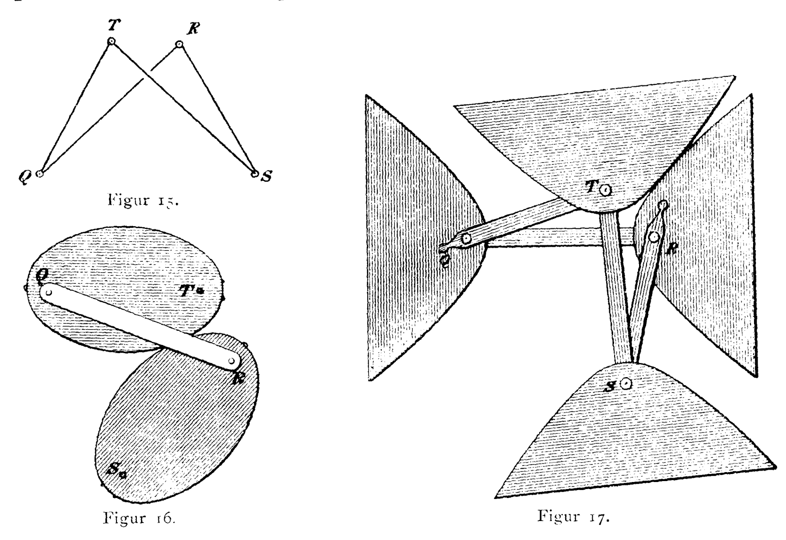
1) Natürlich haben die speziellen Fälle der gewöhnlichen Translationen wie überhaupt jeder Parallelbewegung ihre leicht erkennbare Besonderheit.

2) Daß der Winkel ein rechter sein soll, ist nur wegen der einfachen Beziehung zum rechtwinkligen Koordinatensystem der analytischen Geometrie hinzugefügt; es kann allgemein ein beliebiger Winkel sein.

Weiter gilt hier:

(7) Jeder mit AB fest verbundene Punkt C beschreibt bei dieser Bewegung eine Ellipse, die in einen doppelt zu denkenden Durchmesser des Kreises p übergeht, wenn der Punkt C auf dem Kreise p' liegt (Fig. 14).

Andere Beispiele knüpfen an das Gelenksystem eines Antiparallelogramms $QRST$ an (Fig. 15), d. h. vier Stäbe sind gelenkig so miteinander verbunden, daß sie ein überschlagenes Viereck bilden, dessen Gegenseiten gleich sind. Hält man eine der kleineren Seiten, etwa QT, fest, sodaß die Endpunkte R, S der Gegenseite, welche dann die Strecke AB



Figur 15.

Figur 16.

Figur 17.

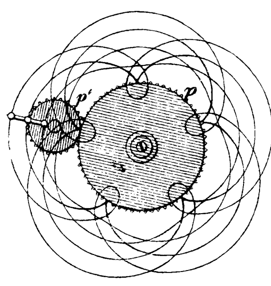
und ihr System Σ vertritt, auf den Kreisen mit den größeren Seiten RQ und ST als Radien um Q, T sich bewegen, so gilt:

(8) Die Polbahnen p, p' der in solcher Weise definierten Bewegung sind zwei stets in symmetrischer Lage befindliche Ellipsen, deren Brennpunkte Q, T bez. R, S sind (Fig. 16).

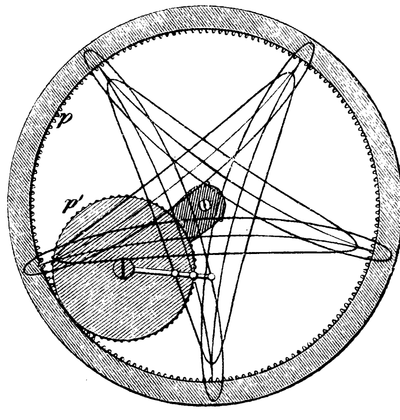
Um nicht zu sehr mich ins einzelne zu verlieren, will ich nur andeuten, daß kongruente Hyperbeln sich als Polbahnen ergeben, wenn man eine der größeren Seiten des Antiparallelogramms festhält (Fig. 17), daß es ferner interessant ist, auch hier die Bahnkurven beliebiger Punkte zu studieren.

Ebenso will ich auch nur kurz die Ausdehnung der Sätze (6) und (7) auf den allgemeineren Fall erwähnen, daß die

Polbahnen zwei beliebige einander innerlich oder äußerlich berührende Kreise, die Bahnkurven dementsprechend zyklische Kurven, Epi- oder Hypotrochoiden, sind (Fig. 18 und 19). Die Mondbahn gibt in gewisser Annäherung hierfür ein Beispiel, das noch besonderes Interesse dadurch bietet, daß sie bekanntlich keine Wendepunkte ent-

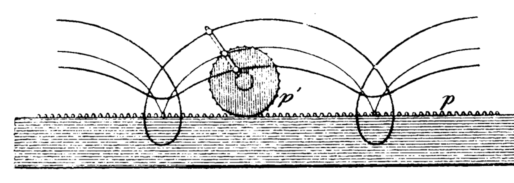


Figur 18.

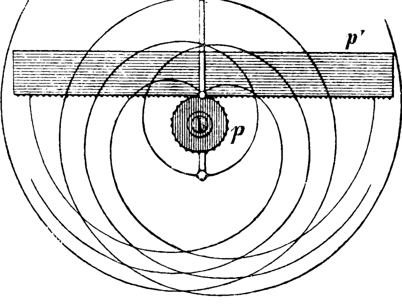


Figur 19.

hält, und seit der Aufstellung des ptolemäischen Systems (Ptolemäus ca. 140 n. Chr.) haben die zyklischen Kurven als Epizykeln der Gestirne eine sehr bedeutende Rolle in der Astronomie gespielt.[1]) Ist im speziellen der feste Polkreis in eine Gerade



Figur 20.



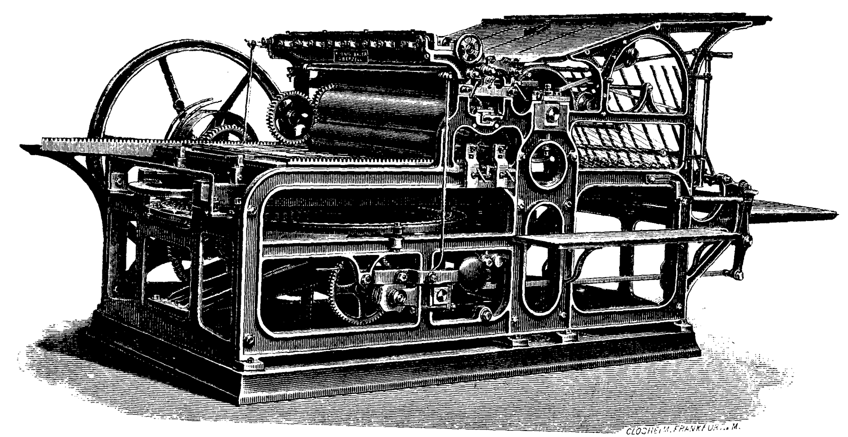
Figur 21.

ausgeartet, so sind die Bahnkurven Zykloiden (Fig. 20), für deren Erzeugung jedes rollende Wagenrad Beispiele liefert; wenn dagegen der bewegliche Polkreis in eine Gerade ausgeartet ist, so sind die Bahnkurven Kreisevolventen (Fig. 21).[2])

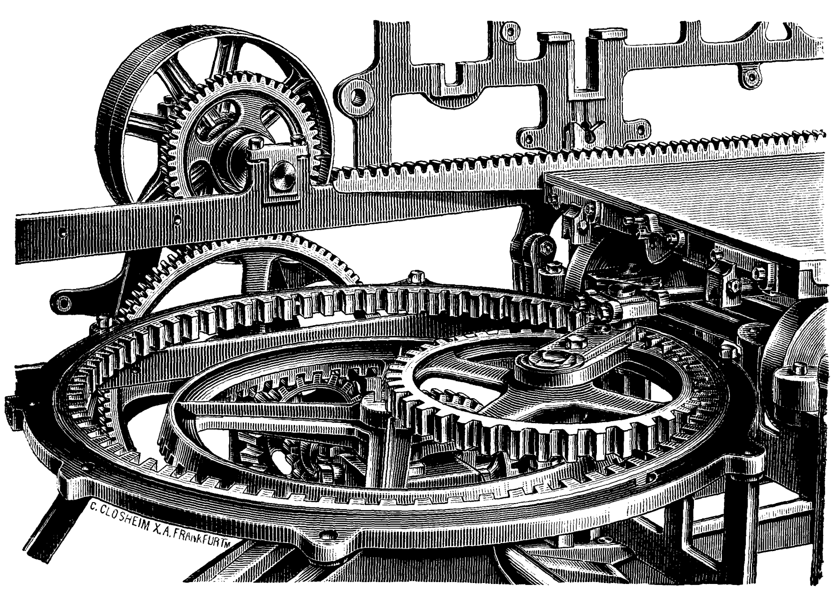
1) Auch A. F. MÖBIUS geht im Interesse der Anschaulichkeit in seinen „Elementen der Mechanik des Himmels" (1843), Gesammelte Werke Bd. IV, Leipzig 1887, von solchen Anschauungen aus.

2) Alle diese Verhältnisse finden Sie näher ausgeführt in meiner Schrift: Über neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der zyklischen Kurven, Halle a. S. 1899, abgedruckt aus der Zeit-

Der Sonderfall der Sätze (6) und (7), der auch zur Konstruktion von Ellipsenzirkeln Anlaß gab, findet eine technische



Figur 22a. Einfache König-Bauersche Schnellpresse mit Geradführung.



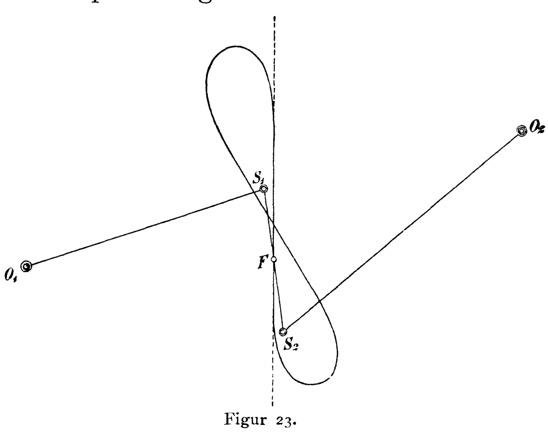
Figur 22b. Detail der Geradführung der König-Bauerschen Schnellpresse.

Anwendung zur Geradführung bei der König-Bauerschen Schnellpresse, wo es sich darum handelt, die rotierende Be-

schrift für Mathematik und Physik 1899, Jahrgang 44 (auch in französischer Übersetzung erschienen in L'enseignement mathématique von Laisant und Fehr, 2. Jahrgang, Paris 1900).

wegung einer Achse in eine geradlinig hin- und hergehende Bewegung umzusetzen (Fig. 22a u. b). Die Erzeugung der allgemeinen Bahnkurven nach diesen Sätzen dagegen hat zur Konstruktion des Ovalwerkes von LEONARDO DA VINCI geführt, einer Drehbank, welche im Ellipsenquerschnitt abzudrehen gestattet.[1])

Das Problem der Geradführung führt uns sogleich in ein anderes Gebiet der Kinematik, nämlich zu den Gelenksystemen, Systemen von Stäben, die durch Gelenke verbunden sind, wofür soeben das Antiparallelogramm uns schon ein Beispiel gab. Die wichtigsten Untersuchungen gruppieren sich hier um die Frage, wie sich durch Gelenksysteme angenäherte oder genaue Geradführungen hervorbringen lassen.[2]) Ein Beispiel der angenäherten Geradführung gibt das sog.



Figur 23.

Wattsche Parallelogramm (Fig. 23), dessen Verwendung bei den Dampfmaschinen älterer Konstruktion bekannt ist[3]), ein Beispiel der genauen Geradführung der sog. Inversor von Peau-

1) Eine ähnliche technische Verwendung dieses Gedankens bieten auch die Maschinen, mit denen sich ellipsenförmige Ausschnitte aus Karton schneiden lassen. Eine Verallgemeinerung dagegen stellt die sogenannte Passigdrehbank dar, bei welcher der abdrehende Stift allgemeine zyklische Kurven beschreibt. Vgl. E. BRAUER, Kinematische Untersuchung der Passigdrehbank, Verhandlungen zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, 55. Jahrgang, Berlin 1876, p. 310—320.

2) Vgl. auch FR. DINGELDEY, Über die Erzeugung von Kurven vierter Ordnung durch Bewegungsmechanismen, Leipzig 1885, sowie

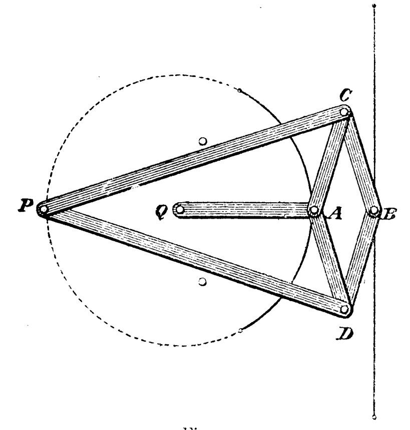
F. EBNER, Die Schubkurbel, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Jahrgang X, 1904, p. 6—12.

3) Zu näherem Studium der angenäherten Geradführung sei auf zahlreiche Arbeiten von Hrn. R. MÜLLER (Braunschweig) verwiesen:

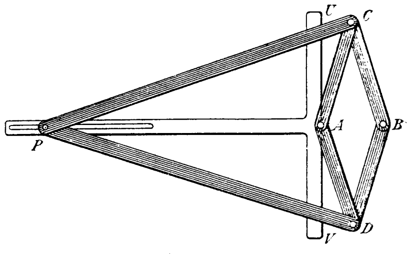
Über die Krümmung der Bahnevoluten bei starren ebenen Systemen, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 36 (1891).

Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte der Hüllbahnevoluten bei starren ebenen Systemen, ebenda, Bd. 36 (1891).

cellier (erfunden 1864), den ich Ihnen hier im Modell vorführe (Fig. 24). Er besteht aus einem Rhombus $ADBC$, an dem in zwei Gegenecken C, D noch zwei gleich lange, mit den anderen Endpunkten in P wieder gelenkig verbundene Stäbe angreifen. Wird der letztgenannte Punkt P in der Ebene festgehalten und außerdem einer der noch freien Eckpunkte des Rhombus, etwa A, durch einen



Figur 24.



Figur 25.

an ihm angebrachten siebenten Stab AQ, dessen anderer Endpunkt Q auch festliegt, auf einem Kreisbogen geführt, der durch den ersten festen Punkt P geht ($AQ = PQ$), so beschreibt der Punkt B eine Strecke einer genauen geraden Linie. Der elementare und über den Standpunkt der höheren Schulen nicht hinausgehende Beweis dieses Resultates beruht

---

Über die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen, ebenda, Bd. 37 (1892).

Konstruktion der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, ebenda, Bd. 37 (1892) und Bd. 38 (1893).

Über eine gewisse Klasse von übergeschlossenen Mechanismen, ebenda, Bd. 40 (1895).

Über die angenäherte Geradführung mit Hilfe eines ebenen Gelenkvierecks, ebenda, Bd. 43 (1898).

Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente, ebenda, Bd. 46 (1901).

Zur Theorie der doppelt gestreckten Koppelkurve, ebenda, Bd. 48 (1903).

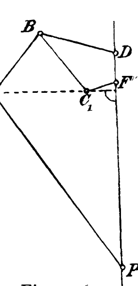
Über die angenäherte Geradführung durch das ebene Gelenkviereck, Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, (1897).

Über einige Kurven, die mit der Theorie des ebenen Gelenkvierecks im Zusammenhang stehen, Festschrift zur Feier des 70. Geburtstages von Richard Dedekind, Braunschweig 1901.

Vgl. auch N. Delaunay, Die Tschebyschefschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen in dem Werke: A. Wassilief und N. Delaunay, P. L. Tschebyschef, Leipzig 1900, p. 57—76.

auf der von dem Gelenksystem vermittelten Transformation durch reziproke Radien.[1]) Der Inversor von Peaucellier gibt mir den Anlaß, folgendermaßen einen Apparat zur Demonstration der Transformation der Polarentheorie zu konstruieren (Fig. 25). In A ist (an Stelle des Hilfsstabes AQ) ein Lineal mit einem rechtwinklig dazu stehenden Ansatz so angebracht, daß die Kante UV durch den als Gelenk ausgebildeten Punkt A geht, der Ansatz aber einen in der Senkrechten zu UV verlaufenden geradlinigen Einschnitt trägt, der an dem festen Punkte P entlang gleitet. Bei jeder Deformation dieses neuen Gelenksystems sind der Punkt B und die Gerade UV Pol und Polare in bezug auf den Kreis um P mit einem Radius, dessen Quadrat gleich $PA \cdot PB = PC^2 - AC^2$ ist. Beschreibt dann B z. B. irgend eine Kurve mit gewöhnlicher Spitze, Wendepunkt, Schnabelspitze, Doppelpunkt, so umhüllt UV die duale Kurve bez. mit Wendepunkt, gewöhnlicher Spitze, Schnabelspitze, Doppeltangente, und beschreibt B eine Gerade, so dreht sich UV um den Pol dieser Geraden. Diese letzte Tatsache kann man benutzen, dies erweiterte Gelenksystem zu einer Art Fluchtpunktschiene auszugestalten, d. h. zu einem Apparat, der Verbindungslinien nach dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier gegebener Geraden zu ziehen erlaubt (vgl. p. 94).[2])

Mit dem Inversor von Peaucellier in engem Zusammenhang steht das durch Fig. 26 dargestellte Gelenksystem. Es besteht aus zwei ähnlichen Deltoiden $BDPC$ und $BDFC_1$, die zwei Paare aufeinander fallender Seiten haben. Es gilt hier der auch mit elementaren Mitteln zu beweisende Satz: Bei jeder Deformation des Systems steht die gedachte Gerade $CC_1 \perp PD$. Auf ihn stützt sich die Verwendung des Gelenksystems zur Konstruktion des Parallellineals, das Sie bereits bei Besichtigung unserer Sammlung kennen lernten, auch hinsichtlich seiner Ver-

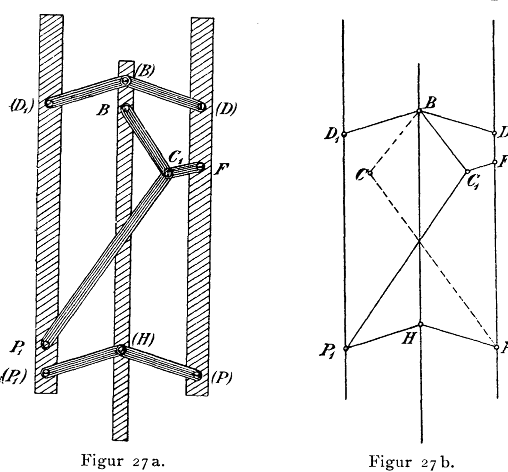


Figur 26.

1) Des Näheren sei auf meine oben genannte Arbeit verwiesen, woselbst auch die Abänderungen des genannten Gelenksystems mit geringerer Stäbezahl (Inversoren von Hart und Sylvester-Kempe) besprochen werden. —

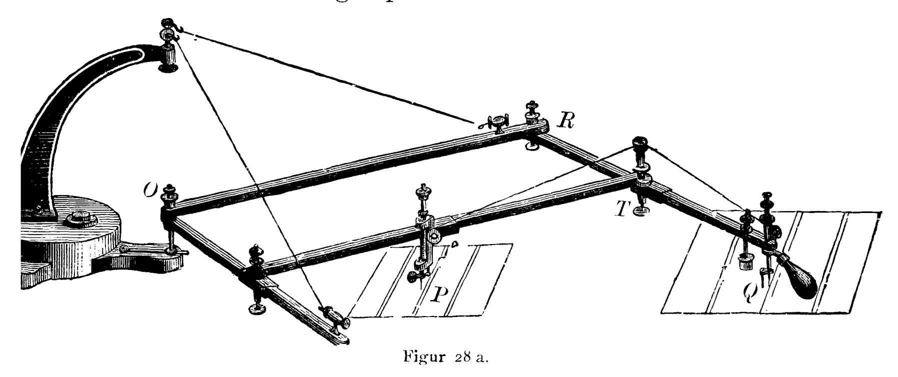
2) Unabhängig von mir hat auch Hr. A. Wlassoff einen ähnlichen Apparat konstruiert, vgl. dessen demnächst in der Zeitschrift für Mathematik und Physik erscheinende Arbeit: Polarograph und Konikograph.

wendung in der Navigation, um den Kurs eines Schiffes auf der Karte in die an anderer Stelle gezeichnete Windrose zu übertragen. Bei jeder Deformation des Parallellineals sind die Abstände des mittleren Lineals von den beiden seitlichen gleich und die schmalen Kanten der letzteren überdies paarweise in derselben Senkrechten zu den Längskanten gelegen. (Vgl. Fig. 27a und die daraus abgeleitete Fig. 27b, welche die Beziehung zu Fig. 26 besser erkennen läßt.)



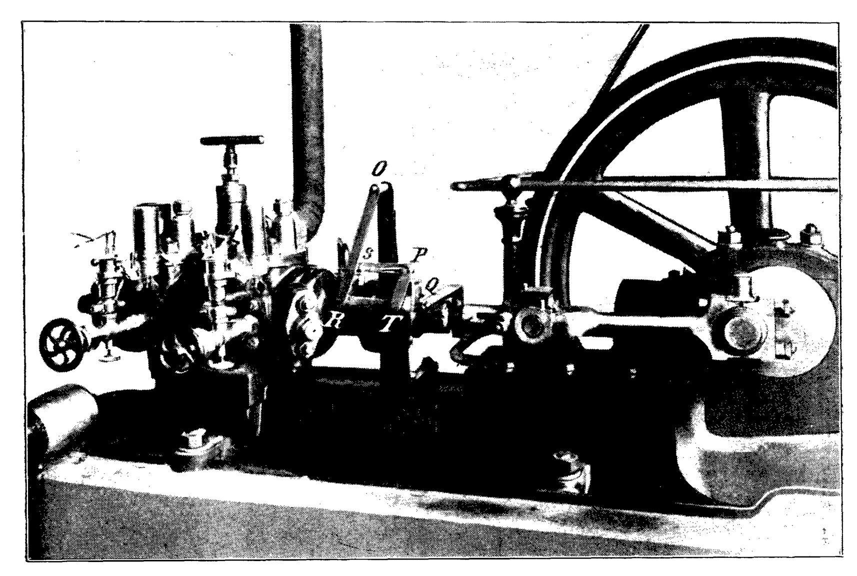
Figur 27a. Figur 27b.

Von anderen Gelenksystemen, welche bestimmte Transformationen vermitteln, möchte ich schließlich noch den Storchschnabel oder Pantographen für die Ähnlichkeitstransformation erwähnen.[1]) Die Figuren 28a, b, c zeigen seine Verwendung beim Lithographen, um Zeichnungen zu vergrößern oder zu verkleinern, im Maschinenbau, um die geradlinige Bewegung des in Q angreifenden Kolbens der Dampfmaschine

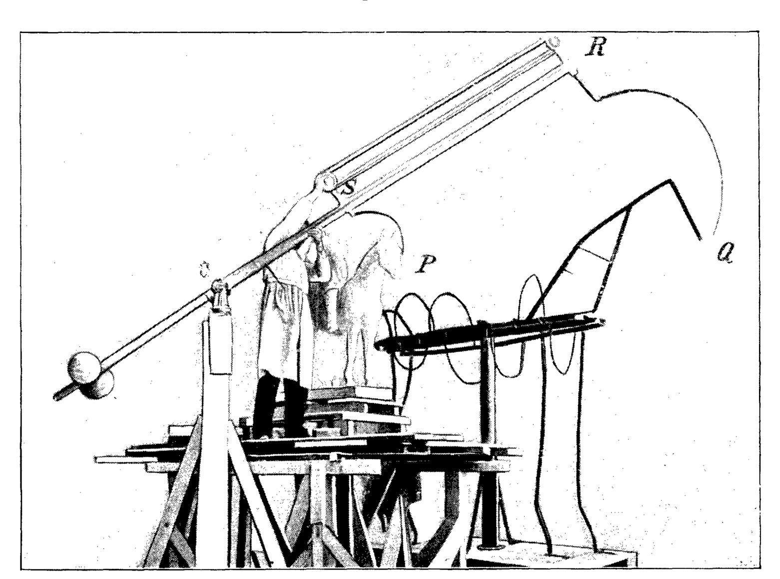


Figur 28a.

1) Das auch sonst die Anwendungen berücksichtigende Lehrbuch H. Bork, P. Crantz und E. Haentzschel, Mathematischer Leitfaden für Realschulen, Leipzig 1904, bespricht den Storchschnabel p. 113—115.



Figur 28 b.



Figur 28 c. Das Nachmessen des Gerüstes für das Gußmodell mit dem Storchschnabel.

vermittels einer von P ausgehenden Schnur auf den Indikator zu übertragen, in der Bildhauerkunst, wo seine räumliche Ausführung zur Vergrößerung körperlicher Modelle dient.

Außer den schon genannten Arbeiten empfehle ich als Literatur die drei kleineren Schriften:

A. B. Kempe, How to draw a straight line, London 1877;
J. Petersen, Kinematik, deutsch von R. von Fischer-Benzon, Kopenhagen 1884;
J. Neuberg, Sur quelques systèmes de tiges articulées, tracé mécanique des lignes, Liège 1886;

und die größeren Werke:

F. Reuleaux, Theoretische Kinematik, Braunschweig 1875;
F. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. II, Leipzig 1883;
L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888;

und verweise endlich auf das an weiteren Zitaten reiche Referat von Hrn. A. Schoenflies über die Kinematik in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, 1, Leipzig 1902, p. 190—278.

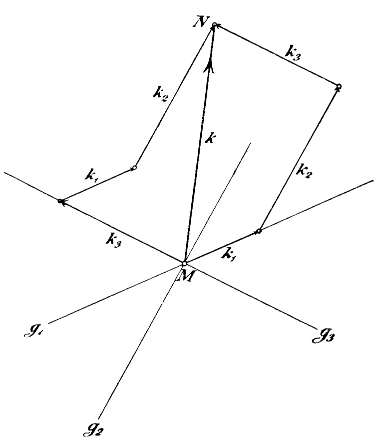
III. Mechanik, speziell reine graphische Statik.

Zu den Elementen Raum und Zeit kommt jetzt noch die Kraft oder die Masse als neues Element hinzu. Bei der graphischen Behandlung der Statik wird eine Einzelkraft durch eine mit Pfeilspitze versehene Strecke dargestellt, welche längs ihrer Geraden, der „Angriffslinie", beliebig verschoben werden kann („linienflüchtiger Vektor"). Ein Kräftepaar ist der Inbegriff zweier entgegengesetzt gleicher Einzelkräfte in parallelen Angriffslinien. Für dasselbe sind nur das Moment, d. h. das Produkt aus der Größe der Einzelkraft und dem Abstande der Angriffslinien, und die Normalenrichtung ihrer Ebene wesentlich, m. a. W., man kann ein gegebenes Kräftepaar durch ein solches andere mit gleichem Moment ersetzen, dessen Ebene zu der des ersten parallel ist. Folglich läßt sich ein Kräftepaar wieder durch eine einzelne mit Pfeilspitze versehene Strecke darstellen, welche auf seiner Ebene senkrecht steht, mit Hinzunahme der Festsetzung, daß die Einzelkräfte einen dem Uhrzeigergang entgegengesetzten Drehungssinn anzeigen sollen, wenn man der Pfeilspitze entgegensieht („freier Vektor").

Den analogen Verhältnissen der Kinematik entsprechend umfaßt die Grundlegung der graphischen Statik die Theorie von der Zusammensetzung und der Zerlegung von Einzelkräften und Kräftepaaren in der Ebene und im Raum und baut sich auf dem Satz vom Parallelogramm

der Kräfte auf.[1]) Um dieses noch näher auszuführen, wollen wir uns zunächst wieder auf die Verhältnisse in der Ebene beschränken.[2]) Das einfachste Beispiel ist hier das folgende:

Aufgabe 1. Drei (oder mehrere) Kräfte k_i, deren Größen, Richtungen und durch *denselben* Punkt M gehende Angriffslinien g_i gegeben sind, zu einer Resultierenden k zusammenzusetzen. Man reihe (Fig. 29) die Kräfte, an dem Punkte M beginnend, der Größe und Richtung nach zu einem offenen „Kräftepolygon" aneinander, die „Schlußlinie" MN, d. h. die Verbindungslinie des Anfangspunktes M und des Endpunktes N ist dann die gesuchte Resultante nach Größe, Richtung und Lage. In der Figur 29 ist die Lösung mit verschiedener Folge der aneinandergereihten Kräfte ausgeführt, um die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes zu zeigen.



Figur 29.

Aufgabe 2. Zwei (oder mehrere) Parallelkräfte einer Ebene zu einer Resultierenden zusammenzusetzen. In der Figur 30 sind g_1, g_2 die gegebenen Angriffslinien zweier Parallelkräfte, deren Größen und Richtungen in dem der bequemeren Zeichnung wegen zur Seite verlegten „Kräfteplan" durch die Strecken $\overrightarrow{K_0K_1}$ und $\overrightarrow{K_1K_2}$ gegeben werden. Man ziehe von einem beliebigen „Pole" P aus die Strahlen nach den Punkten K_0, K_1, K_2 („Seilstrahlen") und durch den be-

1) Über die axiomatische Begründung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte oder der „Vektoraddition" vgl. als neueste Publikationen:

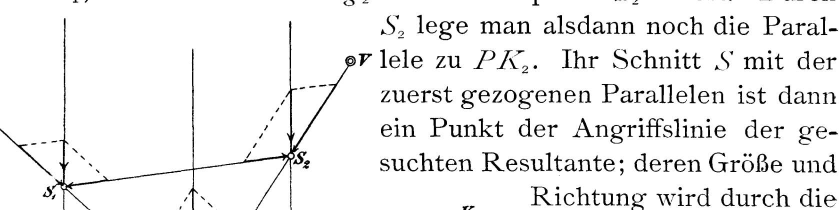
R. SCHIMMACK, Über die axiomatische Begründung der Vektoraddition, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1903;

F. SCHUR, Über die Zusammensetzung von Vektoren, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 49, p. 352—361, Leipzig 1903;

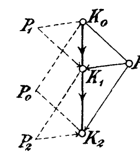
G. HAMEL, Über die Zusammensetzung von Vektoren, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 49, p. 362—371, Leipzig 1903.

2) Die allgemeine Untersuchung über die Zusammensetzung der Kräfte und Kräftepaare im Raum gipfelt wieder in der Theorie des Nullsystems (vgl. Anm. p. 30 und etwa das dort genannte Werk von R. BALL, sowie A. FÖPPL, Graphische Statik, Bd. II der Vorlesungen über technische Mechanik, Leipzig 1900, p. 150 ff.).

liebigen Punkt S_1 auf g_1 die beiden Parallelen zu PK_0 und PK_1, deren letztere auf g_2 den Schnittpunkt S_2 liefert. Durch S_2 lege man alsdann noch die Parallele zu PK_2. Ihr Schnitt S mit der zuerst gezogenen Parallelen ist dann ein Punkt der Angriffslinie der gesuchten Resultante; deren Größe und Richtung wird durch die Schlußlinie $\overrightarrow{K_0K_2}$ gegeben. Im Gegensatz zu dem „Kräftepolygon $K_0K_1K_2$“ nennt man US_1S_2V das „Seilpolygon“, entsprechend der Tatsache, daß, wenn bei unserem Beispiel an einem etwa in U, V befestigten Seile US_1S_2V in den Punkten S_1 und S_2 den gegebenen Kräften gleiche Gewichte hängen, eben durch US_1S_2V die Gleichgewichtslage des Seiles gegeben wird.



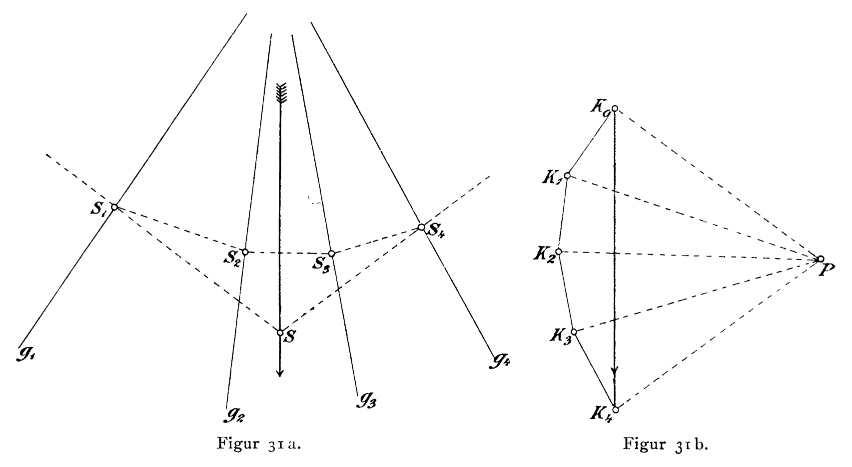
Figur 30 a.



Figur 30 b.

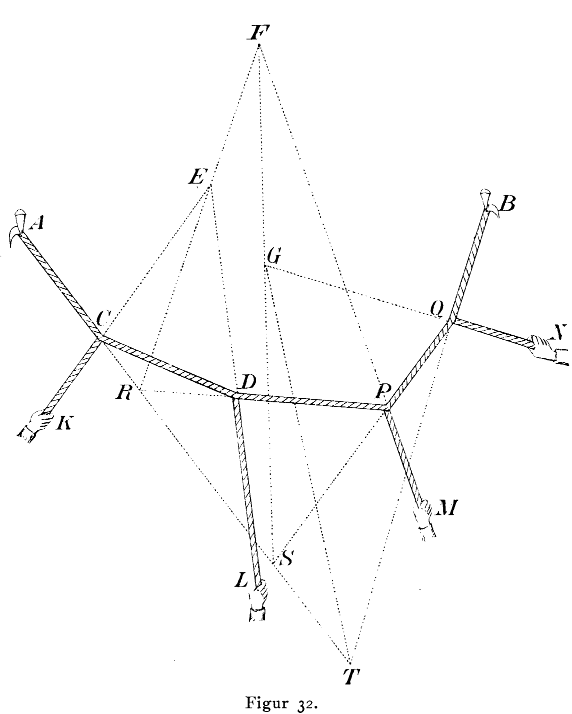
Zum Beweise unserer Konstruktion denken wir jedes der beiden Kräfteparallelogramme $K_0P_1K_1P$ und $K_1P_2K_2P$ mit den Diagonalen K_0K_1 und K_1K_2 der Figur 30 b so in die Figur 30 a gelegt, daß der Eckpunkt K_1 des ersten Parallelogrammes mit S_1, der Eckpunkt K_2 des zweiten mit S_2 zusammenfällt und K_0K_1 längs g_1, K_1K_2 längs g_2 liegt, m. a. W.: Die erste Kraft $\overrightarrow{K_0K_1}$ wird in zwei Komponenten zerlegt, deren Größen und Richtungen durch $\overrightarrow{P_1K_1}$ und $\overrightarrow{PK_1}$ und deren Angriffslinien durch US_1 und S_1S_2 gegeben sind, entsprechend die zweite Kraft in zwei Komponenten, deren Größen und Richtungen durch $\overrightarrow{P_2K_2}$ und $\overrightarrow{PK_2}$, deren Angriffslinien durch S_1S_2 und VS_2 dargestellt sind. Die beiden in S_1S_2 wirkenden Komponenten heben sich auf, da sie entgegengesetzt gleich sind. Die beiden in US_1 und VS_2 können bis zum Schnitt S ihrer Angriffslinien verschoben werden und setzen sich dann wieder nach dem Parallelogramm der Kräfte zu der gesuchten Resultante zusammen, deren Größe und Richtung eben durch $\overrightarrow{K_0K_2}$ gegeben wird; denn das Parallelogramm $K_0P_0K_2P$ der Fig. 30 b stellt, nachdem sein Eckpunkt K_2 mit S und K_0K_2 mit g zur Deckung gebracht ist, gerade diese Zusammensetzung dar.

An diesem einfachsten Beispiele erkennen wir sofort, wie die gleiche Methode sich auf eine beliebige Zahl von Kräften



Figur 31 a. Figur 31 b.

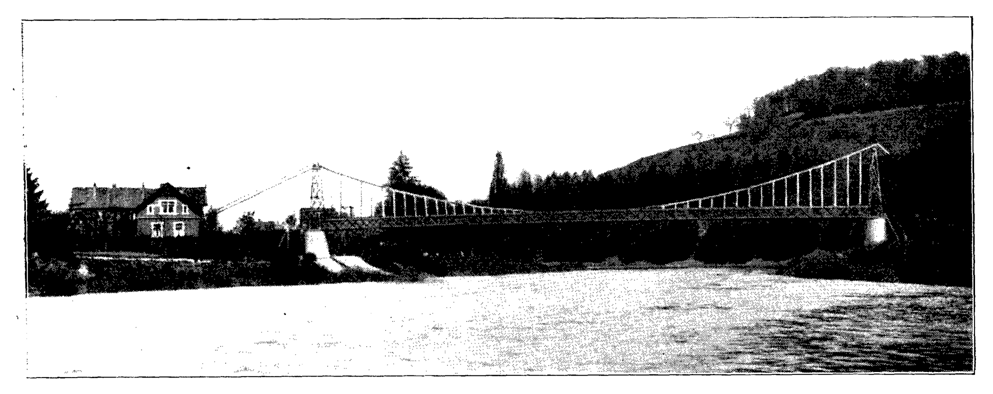
übertragen läßt und daß es für die Konstruktion unwesentlich ist, ob die Angriffslinien parallel sind oder nicht. So gibt Fig. 31 a, b die Konstruktion der Resultante für vier nicht parallele, durch ihre Angriffslinien g_i und ihre Größen und Richtungen $\overrightarrow{K_{i-1}K_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ gegebenen Kräfte. Die Einführung des für die graphische Statik überaus wichtigen Seilpolygons geht bis auf VARIGNON zurück; Fig. 32 stellt eine besonders instruktive Figur von ihm dar, die durch sich selbst verständlich sein dürfte.[1]) Als eine praktische Anwendung des Seilpolygones für pa-



Figur 32.

1) P. VARIGNON, Nouvelle mécanique ou statique, Paris 1725, 2 Bde. — Doch sei bemerkt, daß schon bei Parallelkräften die ursprüngliche Erklärung des

rallele Kräfte möchte ich schließlich die Hängebrücke in dem benachbarten Hannoversch-Münden erwähnen (Fig. 33).



Figur 33. Hängebrücke in Hannoversch-Münden.

Aus der umgekehrten Aufgabengruppe, ein gegebenes System von Kräften oder ihre Resultante in Komponenten nach vorgeschriebenen Bedingungen zu zerlegen, wollen wir folgendes, sogleich in ein praktisches Gewand gekleidetes Beispiel auswählen:

Aufgabe 3. Ein an den Endpunkten horizontal aufliegender Balken (eiserner Träger einer einfachen Brücke) sei durch eine Lokomotive mit Tender belastet; gesucht sind die Auflagerreaktionen, d. h. die in den Auflager-

Figur 34 a.

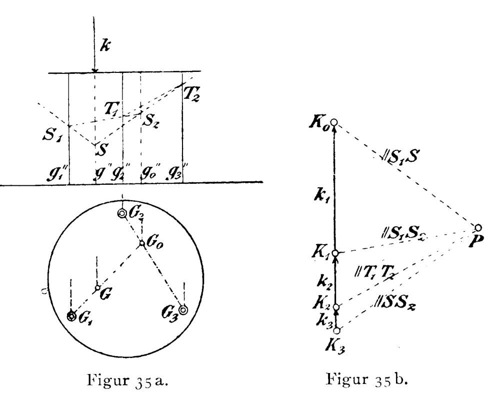
Figur 34 b.

Seilpolygones, nach der es geradezu als ein Seil gedacht werden mag, nicht immer beizubehalten ist, da ein Seil nur auf Zugkraft beansprucht werden kann.

punkten A und B wirkenden Widerstandskräfte. Ohne im einzelnen auf die Lösung einzugehen, bemerke ich nur, daß den Figuren 34 a, b wirklichen Verhältnissen entnommene Zahlenwerte zu Grunde liegen und zu ihrer Konstruktion wieder das Seilpolygon benutzt wurde. Die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B ergeben sich durch

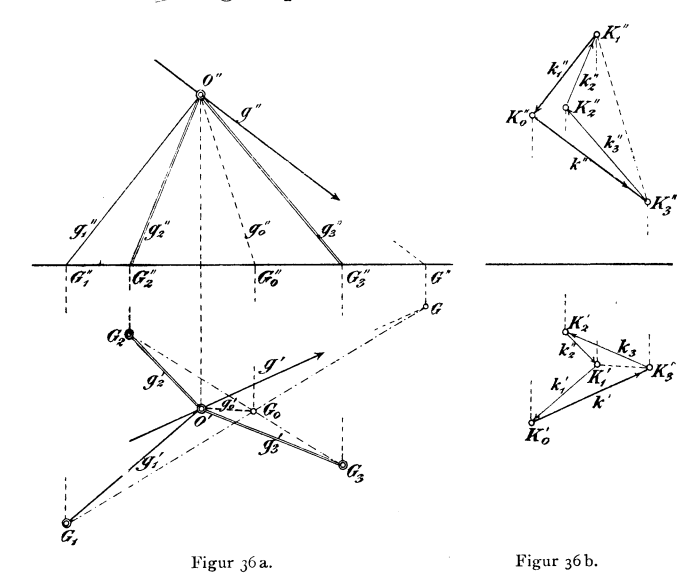
$$\overrightarrow{KK_0} = 32{,}79 \text{ t}$$

und $\overrightarrow{K_6K} = 33{,}51$ t.



Figur 35a. Figur 35b.

Was die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften im *Raume* betrifft, so will ich nur den Fall durch drei Beispiele behandeln, daß alle Kräfte denselben endlichen oder unendlich fernen Angriffspunkt haben. Diese Beispiele sollen



Figur 36a. Figur 36b.

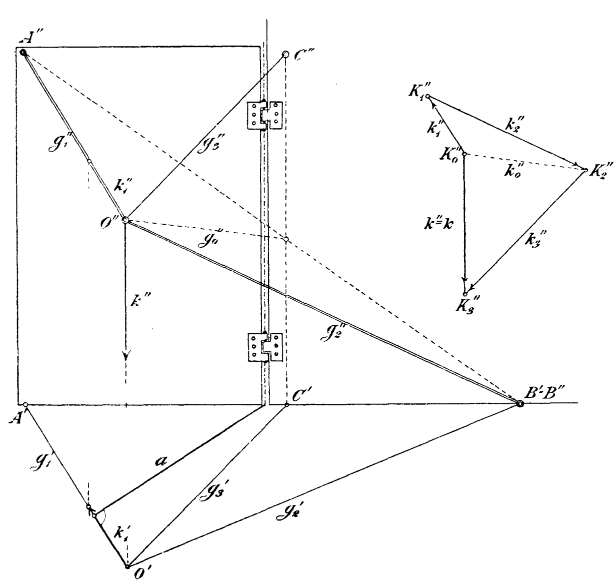
zugleich einfache praktische Anwendungen darbieten, die jedoch keinerlei besondere Vorkenntnisse erfordern.

Aufgabe 4. Ein Tisch mit drei vertikalen Beinen g_i ist durch ein gegebenes Gewicht $k = \overrightarrow{K_0K_3}$ belastet;

die drei Reaktionskräfte k_i in den Tischbeinen zu bestimmen (Fig. 35 a, b).

Aufgabe 5. Drei von einem Punkte O ausgehende Balken sind mit den Endpunkten G_i auf dem Erdboden befestigt; an ihrem gemeinsamen Punkt O greift eine gegebene Last k (vertikal oder in gegebener anderer Richtung g) an; gesucht sind die drei in den Balken wirkenden Reaktionskräfte k_i (Fig. 36 a, b).[1]) (Sog. Bockgerüst, wie es z. B. oft in Steinbrüchen zum Tragen des Flaschenzuges benutzt wird.)

Aufgabe 6. Von den Punkten B und C der Wandseite, an der die Angeln einer Tür befestigt sind, und von einem Punkt A oben an der gegenüberliegenden Türkante gehen drei Stäbe aus, die sich in einem Punkte O treffen und zwar auf der Seite, nach der die Tür sich öffnet. In O ist ein Gewicht k angebracht. Mit welchem Drehmoment wird die Tür zugehalten? (Fig. 37 a, b, das gesuchte Drehmoment ist gleich $k_1' . a$.)



Figur 37 a und b.

Auf nähere Erläuterung dieser Konstruktionen muß ich hier wohl verzichten, vielmehr auf die im Grund- und Aufriß ausgeführten Zeichnungen zu verweisen mich begnügen. Auch kann ich Ihnen für die letzte Aufgabe ein Modell zeigen, das einer meiner Schüler angefertigt hat. Daß diese Aufgabe ferner

1) Einen auf Druck beanspruchten Stab pflegt man in den Figuren durch eine Doppellinie, einen auf Zug beanspruchten durch eine einfache Linie zu kennzeichnen.

Gelegenheit bietet, für verschiedene Stellungen der geöffneten Tür die Lösung durchzuführen und dementsprechend die Veränderung des Drehmomentes und die Bestimmung seines Maximums graphisch zu studieren, will ich wiederum unter Hinweis auf die hier ausgelegte Zeichnung nur andeuten. Wollte man diese Aufgabe analytisch lösen, so würden recht komplizierte Rechnungen erforderlich sein, während die graphische Lösung überraschend schnell und übersichtlich zum Ziele führt.

Von weiteren größeren Gebieten der graphischen Statik möchte ich noch die graphische Bestimmung der Schwerpunkte und Trägheitsmomente von Linien, Flächen und Körpern nennen, wofür die angenäherte Bestimmung des Schwerpunktes M für den Querschnitt einer Eisenbahnschiene ein praktisches Beispiel bietet.[1]) In engster Beziehung zu diesen Problemen steht die Theorie der graphischen Integration überhaupt. In jüngster Zeit hat endlich Hr. R. MEHMKE auch die graphische Integration der Differentialgleichungen der Mechanik erfolgreich in Angriff genommen.[2])

In der graphischen Statik stehen zu weiteren Studien vorzügliche Lehrbücher zur Verfügung, ich nenne folgende deutsche Werke:

R. LAUENSTEIN, Die graphische Statik, Elementares Lehrbuch für technische Lehranstalten und zum Gebrauch in der Praxis, 5. Aufl., Stuttgart 1899;

A. FÖPPL, Graphische Statik (Bd. II der Vorlesungen über technische Mechanik), 2. Aufl., Leipzig 1903;

H. F. B. MÜLLER-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, 2. Aufl., Leipzig 1893, und Die graphische

1) Vgl. G. HOLZMÜLLER, Die Ingenieurmathematik in elementarer Behandlung, I. Teil, enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Zentrifugalmomente etc., Leipzig 1897.

2) Vgl. R. MEHMKE, Zur graphischen Kinematik und Dynamik, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XII, Leipzig 1903, p. 561—563, seinen Vortrag auf der nächsten Naturforscherversammlung in Breslau: „Zur graphischen und mechanischen Integration von Differentialgleichungen" und einen demnächst erscheinenden Aufsatz in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, wie Hr. Mehmke mir mitteilte, sowie R. PROELL, Versuch einer graphischen Dynamik, mit Atlas, Leipzig 1874, FR. WITTENBAUER, Graphische Dynamik der Getriebe, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 50, Leipzig 1904, p. 57—97.

Statik der Baukonstruktionen, Bd. I, 3. Aufl., Leipzig 1901; Bd. II, 1, Leipzig 1902;

sowie als historisch interessant das Werk des systematischen Begründers der graphischen Statik:

C. CULMANN, Die graphische Statik, 2. Aufl., Zürich 1875, dessen Fortsetzung:

W. RITTER, Anwendungen der graphischen Statik, Zürich, 1.—3. Teil, 1888—1900

bildet. Endlich kann ich wieder auf die Referate von Hrn. G. JUNG, Geometrie der Massen, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. IV, 1 p. 279—344 und von Hrn. L. HENNEBERG, Die graphische Statik der starren Körper, ebenda p. 345—434 (Leipzig 1903) als Anregung zu umfassenderen Studien verweisen.[1])

IV. Mathematische Physik.

In erster Linie habe ich hier die geometrische Optik zu nennen, da sie eine reichhaltige Gruppe graphisch zu behandelnder Aufgaben liefert. Ich möchte auf das Buch E. REUSCH, Konstruktionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems, Leipzig 1870, verweisen, das in elementarer Weise die von GAUSS stammende Theorie an der Hand geometrischer Konstruktionen entwickelt. Überdies kann ich Ihnen eine Reihe solcher Zeichnungen aus der geometrischen Optik vorlegen, die ich selbst seinerzeit als Studierender hier in Göttingen im Seminar des Hrn. E. RIECKE angefertigt habe. Diese sowie ein Blick auf die in dem genannten Buch auf fünf Tafeln ausgeführten Zeichnungen werden zweifellos sofort Ihr lebhaftes Interesse für diesen Gegenstand erregen. Das folgende

---

1) Seit deren Erscheinen sind zwei weitere größere Lehrbücher veröffentlicht:

C. MEHRTENS, Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre in drei Bänden, Bd. I, Leipzig 1903, und

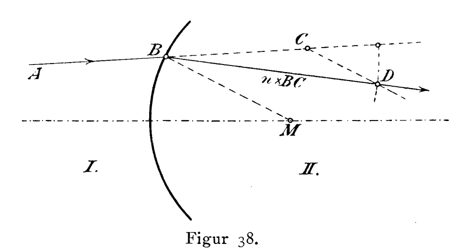
A. OSTENFELD, Technische Statik, Vorlesungen über die Theorie der Tragkonstruktionen, Leipzig 1903.

Zur ersten Einführung geeignet nenne ich noch:

W. HAUBNER, Statik, I. u. II. Teil, Leipzig 1903 und 1904 (Sammlung Göschen).

Vgl. ferner First report of the Committee on the development of graphic methods in mechanical science, Report of the 59 meeting of the British Association (1889), London 1890, p. 322—327, sowie H. S. HELE-SHAW, Second report on the development of graphic methods in mechanical science, Report of the 62 meeting of the British Association (1892), London 1893, p. 373—531.

Beispiel mag die hier zu benutzenden Methoden näher charakterisieren. Die durchsichtigen Medien I und II grenzen in einer Kugelfläche aneinander, deren Meridianschnitt in der Figur 38 durch den Kreisbogen um M dargestellt sei. Außerdem sei der Brechungsexponent n der Medien, etwa gleich $^3/_2$, bekannt. Um zu dem einfallenden Strahl AB den gebrochenen BD zu konstruieren, ziehe man durch einen beliebigen Punkt C auf der Verlängerung von AB die Parallele zum Einfallslot BM und bringe sie in D zum Schnitt mit dem Kreisbogen um B, dessen Radius gleich $n \cdot BC$ ist; dann ist BD der gebrochene Strahl. In ähnlicher Weise kann man den Weg eines beliebigen Strahls durch eine ganze Reihe von Medien verfolgen und dementsprechend die Verbindung zweier oder mehrerer Linsen studieren. Noch weitergehende Untersuchungen enthält das in jeder Weise vorzügliche ältere Werk von F. ENGEL (Lehrer der darstellenden Geometrie) und K. SCHELLBACH (dem bekannten mathematischen Pädagogen): Darstellende Optik nebst 21 Kupfertafeln, Halle a/S. 1856. Ich bitte Sie, nur die ganz wunderbar gezeichnete Figur auf Tafel II zu betrachten; sie stellt die vollständige Katakaustika für einen Kreis dar, d. h. die Kurve, welche die von einem leuchtenden Punkt ausgesandten Strahlen nach ihrer Reflexion an einem Kreis umhüllen.[1])



Figur 38.

Als zweites Gebiet der mathematischen Physik, das zu geometrischen Konstruktionsaufgaben Anlaß gibt, erwähne ich die Potentialtheorie mit ihren verschiedenen Anwendungen (Gravitation, Magnetismus, Elektrizität, Wärme, Hydrodynamik) und verweise auf G. HOLZMÜLLER, Ingenieur-

1) Vgl. S. FINSTERWALDER, Die von optischen Systemen größerer Öffnung und größeren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder, Abhandlungen der k. bayr. Akademie, II. Cl., XVII. Bd., III. Abt., München 1891. Von analytischen Darstellungen der geometrischen Optik nenne ich zum Vergleich noch folgende Werke:

C. NEUMANN, Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems, 2. Aufl., Leipzig 1893;

A. GLEICHEN, Lehrbuch der geometrischen Optik, Leipzig 1902;

M. VON ROHR, Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten vom Standpunkt der geometrischen Optik, Leipzig 1904.

mathematik etc. Bd. II, enthaltend das Potential und seine Anwendungen (Leipzig 1898). Um doch ein bestimmtes Beispiel zu geben, nenne ich die leicht zu verallgemeinernde Aufgabe: Die Potential- und Kraftlinien in einer Meridianebene für den Fall darzustellen, daß a) ein elektrischer Massenpunkt, b) zwei gleichnamige, gleichwertige elektrische Massenpunkte, c) zwei ungleichnamige, gleichwertige elektrische Massenpunkte gegeben sind.[1]) Daß auch sonst verschiedene Gebiete der mathematischen Physik zu manchen Konstruktionsaufgaben Beispiele bieten, dafür sei noch das GAY-LUSSACsche Gesetz der Ausdehnung $V = V_0(1 + 3\alpha t)$, wo α der lineare Ausdehnungskoeffizient und t die Temperatur ist, ein Beispiel: Es sei die Zeichnung eines Würfels vor und nach seiner Erwärmung und die dadurch vermittelte Veranschaulichung der Formel $(a + b)^3$ gewünscht.[2])

V. Analysis und Algebra.

Die Potentialtheorie führt uns sofort wegen ihrer nahen Verwandtschaft mit der Funktionentheorie und der Theorie der konformen Abbildung zu den graphischen Methoden der Analysis. Bekannt ist die geometrische Theorie der komplexen Zahlen[3]), die zahlreiche durch Zeichnung zu lösende Aufgaben stellt, meist unter zweckmäßiger Benutzung des Koordinatenpapiers.[4]) Als Beispiel sei erwähnt: Die Summe z der drei komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = 4 + 8i$, $z_3 = -7 + 3i$ zu konstruieren. Die Figur 39 zeigt dem kommutativen Gesetz entsprechend zugleich die verschiedenen Möglichkeiten, von

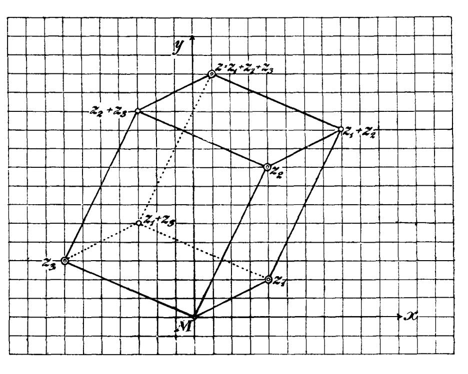
1) Vgl. die Konstruktionen und die Figuren bei G. HOLZMÜLLER, l. c. p. 27, 107 und 121 und bei C. H. MÜLLER und O. PRESLER, l. c. p. 108, Aufg. 109 und die eigentlich in den Text gehörende Anmerkung 61, p. 305 dazu, sowie die von Hrn. O. WIENER herausgegebenen drei Drahtmodelle dieser Verhältnisse, Verlag von Martin Schilling, Halle a/S. 1901.

2) Vgl. MÜLLER-PRESLER, l. c. p. 108 u. 305.

3) Vgl. H. DURÈGE, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe, mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemanns, 4. Aufl., Leipzig 1893.

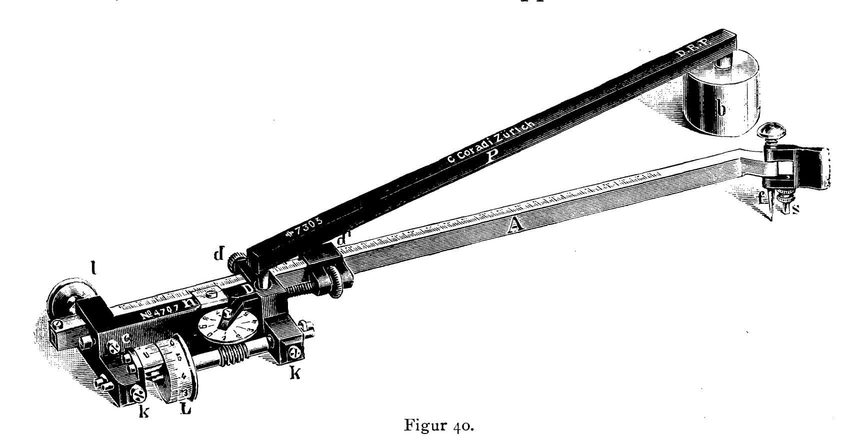
4) Dasselbe ist in den Papierhandlungen sowohl in großen Bogen wie auch in Blocks mit ganzen oder halben Quartseiten zu kaufen. Vgl. J. PERRY, Höhere Analysis für Ingenieure, übersetzt von R. FRICKE und FR. SÜCHTING, Leipzig 1902, p. 7 ff.

dem Nullpunkt ausgehend durch Aneinanderreihen der den Zahlen z_1, z_2, z_3 entsprechenden Strecken (Vektoren) zu der Zahl z zu gelangen. Man erkennt sofort die nahe Beziehung zu der Aufgabe der graphischen Statik auf p. 41, Fig. 29 („Vektorenrechnung"); andererseits ist die Figur 39 nach dem Satz von POHLKE[1]) auch als schiefe Parallelprojektion eines Würfels zu betrachten, was gewiß zu ihrer Übersichtlichkeit beiträgt. Wegen der Fortsetzung dieser Betrachtungen sei auf G. HOLZMÜLLER, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik, Leipzig 1882, hingewiesen.



Figur 39.

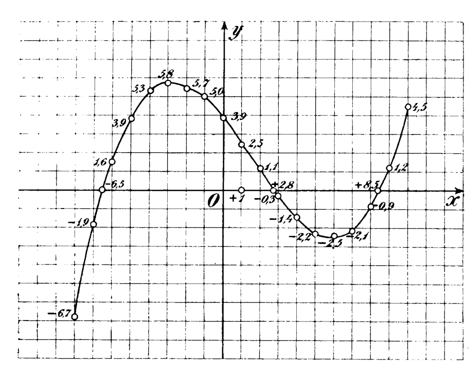
Was ferner die Differential- und die Integralrechnung betrifft, so möchte ich hier solche Apparate nennen, die mechanisch mit Hilfe graphischer Kurven hierher gehörende Aufgaben lösen: Das Planimeter in seinen verschiedenen Ausführungen (Polarplanimeter Fig. 40), den Integraphen und den



Figur 40.

1) Vgl. meinen Aufsatz: Über den POHLKEschen Satz, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 48, Leipzig 1902, p. 487—494.

harmonischen Analysator, wegen deren Theorie ich aber auf die Literatur zu verweisen mich begnüge.[1]) Im übrigen kann ich alle diese Apparate Ihnen aus unserer Sammlung hier vorführen.



Figur 41.

Wir wenden uns nun zur Algebra. Anstatt die mannigfachen Methoden zur graphischen Auflösung von Gleichungen oder Gleichungssystemen allgemein im einzelnen zu besprechen[2]), wollen wir uns damit begnügen,

1) Eine sehr anschauliche und auch bei Ihrem Unterricht verwendbare Theorie des Planimeters gibt B. Kirsch, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1890, p. 1053 ff. Vgl. auch M. Doll, Untersuchung der Genauigkeit des Planimeters Nr. 155 von Ott und Coradi in Kempten, Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 11, 1880, p. 28—32, Untersuchung der Genauigkeit zweier Planimeter von J. Amsler-Laffon in Schaffhausen, ebenda p. 33—37, ferner in bezug auf die Fehlertheorie des Planimeters in derselben Zeitschrift neben anderen die Arbeiten von F. Günther (Bd. 12, 1883), P. Fenner (Bd. 15, 1886), F. Lorber (Bd. 13, 1884 und Bd. 17, 1888), sowie die Abhandlung: Die Planimeter Coradi 1895 von der Firma G. Coradi-Zürich. Wegen der beiden anderen Instrumente verweise ich auf Br. Abdank-Abakanowicz, Die Integraphen, die Integralkurve und ihre Anwendungen, deutsch von E. Bitterli, Leipzig 1889; H. Lossier, L'intégraphe Abdank-Abakanowicz, Zürich 1903; G. Coradi, Der harmonische Analysator mit einer Theorie desselben von Prof. O. Henrici in London, Zürich 1894, die Aufsätze der Hrn. A. Amsler und O. Henrici in W. Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle etc., p. 99—136, endlich die Beschreibung verschiedener ähnlicher Apparate p. 180—224 ebenda. Den neuen Michelsonschen Analysator beschreibt C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen, Leipzig 1904, p. 164 bis 168 (Sammlung Schubert), vgl. auch besonders die Originalarbeiten A. A. Michelson und S. W. Stratton, A new harmonic Analyser, Philosophical Magazine 5. Ser., Bd. 45, London 1898, p. 85—91, und American Journal of sciences, 4. Serie, Bd. 5, 1898, p. 1—13. Ganz kürzlich ist noch ein interessanter Apparat veröffentlicht worden, der selbsttätig den während eines Spazierganges oder einer Fahrt zu Wasser oder zu Lande zurückgelegten Weg aufzeichnet; vgl. Th. Ferguson, Automatic surveying instruments and their practical uses on land and water, London 1904.

2) Vgl. auch die später behandelten Methoden der Fachwerkstheorie in der angewandten graphischen Statik (p. 269 ff.), welche im wesentlichen die graphische Lösung eines Systems linearer Gleichungen bedeuten.

ein einfaches Beispiel zu erwähnen: Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 4{,}8\,x^2 - 49{,}65\,x + 154{,}7 = 0$ zu bestimmen (Fig. 41). Man zeichne in rechtwinkligen Koordinaten, am besten wieder unter Benutzung von Koordinatenpapier, die Kurve

$$y = \frac{1}{40}(x^3 - 4{,}8\,x^2 - 49{,}65\,x + 154{,}7),$$

nachdem man vorher für hinreichend viele Punkte der Kurve ihre Koordinaten berechnet hat, wie die folgende Tabelle zeigt:

$x=$	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=$	−6,7	−1,9	1,6	3,9	5,3	5,8	5,7	5	3,9	2,5	1,1	−0,3	−1,4	−2,2	−2,5	−2,1	−0,9	1,2	4,5

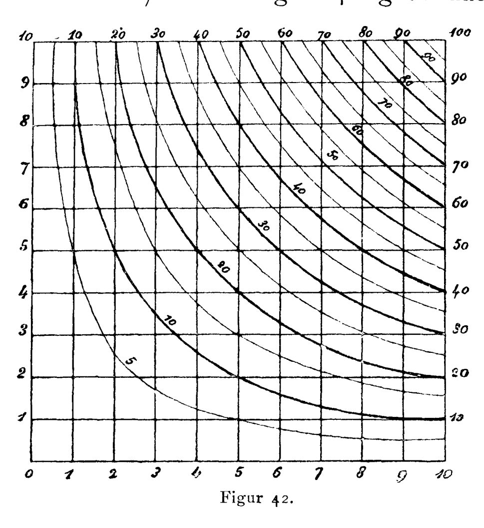
Die Abszissen der Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse geben die gesuchten Wurzeln $-6{,}5$; $+2{,}8$; $+8{,}5$. Ausführliche Literatur zu diesem Abschnitt enthält R. Mehmke, Referat über numerisches Rechnen, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, Leipzig 1902, p. 1006—1024 (Abschnitt B III des Referates).

Etwas eingehender möchte ich lieber von der mit diesen Methoden verwandten und doch davon wesentlich verschiedenen Nomographie sprechen, da dieses Gebiet nicht so bekannt sein dürfte. Während man bei den soeben erwähnten Methoden in jedem einzelnen Falle eine geometrische Konstruktion ausführen muß, um die gesuchten Wurzeln einer Gleichung, etwa als Strecken, zu erhalten, hat die Nomographie Methoden zur Konstruktion von Rechenblättern (Nomogrammen)[1] ausgebildet. Ein einzelnes solches Blatt, das einer bestimmten durch eine oder mehrere vorgegebene Gleichungen definierten Abhängigkeit zwischen veränderlichen Größen entspricht, gestattet, nachdem es einmal gezeichnet vorliegt, unmittelbar die Werte der abhängigen Variabeln aus ihnen zu entnehmen, wenn die unabhängigen irgend welche speziellen Werte erhalten. Die Nomographie will also einen Ersatz bieten für die Aufstellung von Tabellen, die besonders dann im allgemeinen recht umständlich sind, wenn es sich um Gleichungen zwischen mehr als zwei Variabeln handelt. Diese Rechenblätter bieten überdies oft wie die gewöhnliche graphische Darstellung einer Funktion,

1) Die Bezeichnung „Rechenblatt“ statt Rechentafel stammt von Hrn. H. Fürle; das Wort „Nomogramm“ ist von mir kürzlich vorgeschlagen und auch von Hrn. M. d'Ocagne akzeptiert worden (vgl. R. Mehmke, Referat, l. c. Anm. 412 S. 1025).

z. B. eine Temperaturkurve, den Vorteil der leichten Übersicht über den gesamten Verlauf der Funktionen. Einige Beispiele mögen dies näher erläutern:

Erstes Beispiel: Multiplikationsblatt (Cartesische Methode). Die Figur 42 gibt das Rechenblatt für die Gleichung $ab = c$. Die eingezeichneten Kurven sind Äste von gleichseitigen Hyperbeln, der gegebenen Gleichung für verschiedene Werte von c entsprechend, wenn man a und b als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten deutet. Die Werte von c sind dann den einzelnen Kurven als ihre „Koten“ beigefügt.[1]) Der Gebrauch des Blattes zur Multiplikation und Division ist leicht zu verstehen. Es bietet insofern besonderes Interesse, als es das erste bekannte Rechenblatt darstellt; es wurde zuerst von L. E. Pouchet (1795) konstruiert.



Figur 42.

Zweites Beispiel: Rechenblatt mit Kurvenkreuzung (nomogramme à entrecroisement).

Ist p das in g angegebene Gewicht des in 1 cbm Luft von t^0 C. enthaltenen Wasserdampfes, dessen Spannkraft f mm ist, so besteht folgende Beziehung:

$$p = \frac{810 f}{760 + 2{,}78\, t}.$$

Die Spannkraft f ferner ist als eine empirisch nach der Tabelle von Regnault bestimmte Funktion der auf dem Hygrometer abgelesenen Kondensationstemperatur t' gegeben zu denken.

Wir bezeichnen jetzt mit x, y rechtwinklige Koordinaten und setzen:

$$x = l_1 \cdot 810 f,$$
$$y = l_2 \cdot 2{,}78\, t,$$

1) Vgl. die Methode der kotierten Projektionen (p. 249) und die Darstellung der Flächen (p. 214).

wo l_1, l_2 gewisse „Moduln“ bezeichnen, über die wir noch frei verfügen können. Sie haben der Figur 43 entsprechend die Werte $l_1 = 0{,}0037$ mm und $l_2 = 0{,}43$ mm erhalten, sodaß

$$x = 3 \text{ mm} \cdot f \quad \text{und} \quad y = 1{,}2 \text{ mm} \cdot t \quad \text{ist.}$$

Durch Substitution dieser Werte in obige Gleichung ergibt sich:

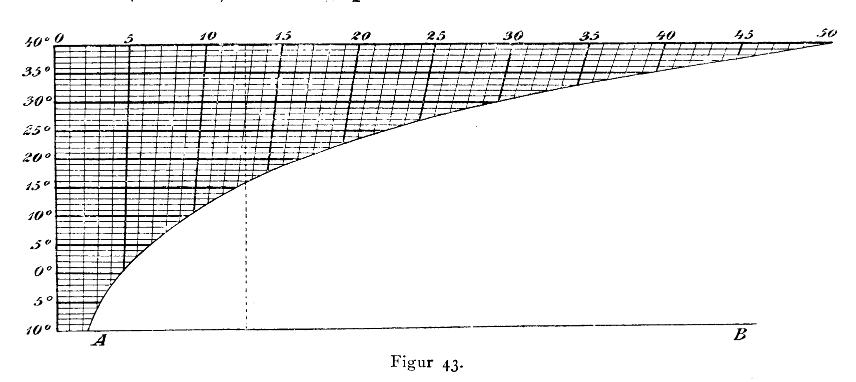
$$760\, p + p \cdot \frac{y}{l_2} - \frac{x}{l_1} = 0.$$

Diese Gleichung stellt dem Parameter p entsprechend ein Büschel von Geraden, „Radianten“, dar, die sämtlich durch den Punkt

$$x = 0, \quad y = -\, l_2 \cdot 760 \text{ mm}$$

gehen.

In der Figur sehen wir nun auf der Ordinatenachse die „Skala“ (échelle) der Temperatur mit den Parallelen durch die



Figur 43.

Teilpunkte zur Abszissenachse, auf der oberen Begrenzungsgeraden die Werte von p, welche den einzelnen ausgezogenen Radianten entsprechen. Die noch eingezeichnete Begrenzungskurve (Kurve der Maximalspannung) stellt die zwischen den Werten f und t' bestehende Funktion graphisch dar, wobei wieder

$$x = 3 \text{ mm} \cdot f \quad \text{und} \quad y = 1{,}2 \text{ mm} \cdot t'$$

gesetzt ist. Der Gebrauch dieses Blattes ist aus folgendem Zahlenbeispiel zu entnehmen. Es sei $t = 30^\circ$ und $t' = 16^\circ$ gegeben. Man gehe auf der Horizontalgeraden durch den mit 16° bezeichneten Ordinatenpunkt bis zum Schnittpunkt mit der Kurve, dann von diesem mit Hilfe eines in der Richtung der Abszissenachse beweglichen „Index“, der in der Figur gestrichelt

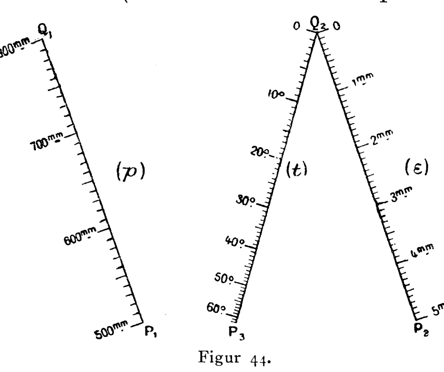
angedeutet ist, parallel zur Ordinatenachse nach oben bis zum Schnittpunkt mit der durch den Ordinatenpunkt 30° gehenden Horizontalgeraden. Die durch den letztgenannten Schnittpunkt gehende Radiante trägt als „Kote" den gesuchten Zahlwert $p = 12{,}9\ g$.

Drittes Beispiel: Kollineare Rechentafel (nomogramme à alignement).

Bezeichnet ε die in Millimetern angegebene Korrektion, welche von dem bei t° C. in Millimetern Quecksilber abgelesenen Barometerstande p abzuziehen ist, um letzteren auf 0° C. zu reduzieren, so gilt die Beziehung:

$$\varepsilon = 0{,}00016\, pt.$$

In der Fig. 44 sind auf den mit (p), (ε) und (t) bezeichneten Geraden (deren erste beiden parallel sind) in bestimmter Weise die Skalen für die Veränderlichen p, ε, t aufgetragen und zwar so weit, als praktisch Werte für sie in Betracht kommen. Wie diese Skalen im einzelnen zu konstruieren sind, wollen wir hier nicht wiedergeben, da dies zu weit führen würde. Die Anwendung der erhaltenen, in der Figur in verkleinertem Maßstabe dargestellten Rechentafel ist dann einfach folgende: Ist z. B. $p = 640$ mm und $t = 25^{\circ}$ gegeben, so verbinde man die entsprechend bezeichneten Punkte der Skalen (p) und (t) durch eine Gerade und lese an dem Schnittpunkte mit der dritten Skala (ε) die „Kote" $\varepsilon = 2{,}56$ mm ab, welche den gesuchten Wert darstellt.

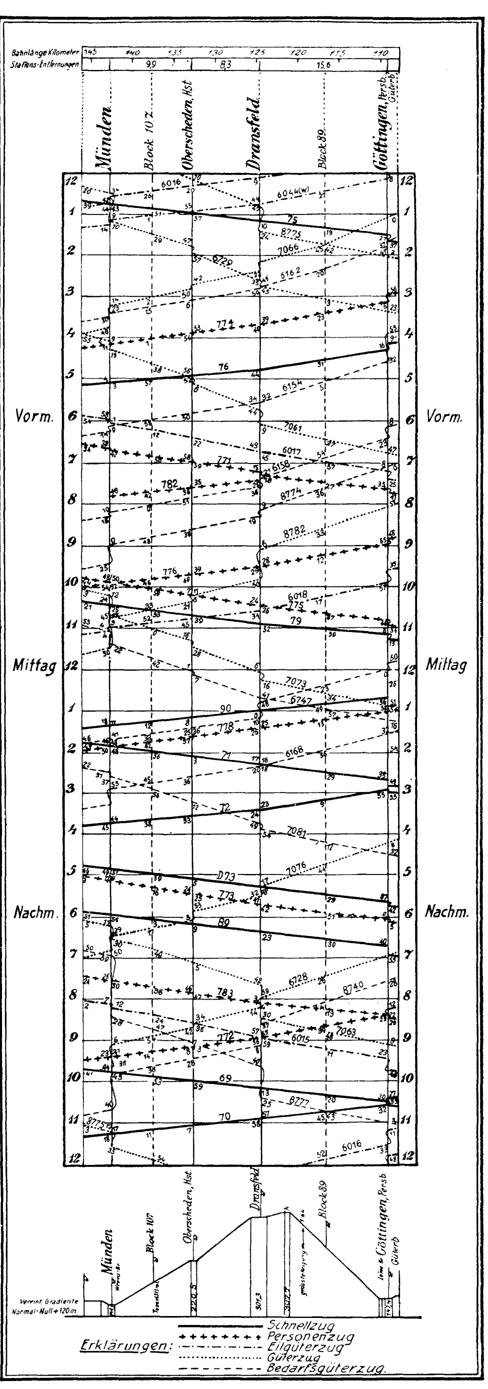


Figur 44.

Überaus zahlreich sind die Anwendungsgebiete der Nomographie, wie die mannigfachen veröffentlichten Beispiele aus Physik, Ingenieurwesen, Nautik, Astronomie, Versicherungs- und Finanzwissenschaft, Geodäsie und Militärwesen dartun.[1]) Das umfassendste, an solchen Beispielen reiche Werk (480 + XIV S.)

1) Wegen der näheren Literatur vgl. wieder R. Mehmke, Referat über numerisches Rechnen, Encykl. der math. Wiss. Bd. I, Abschnitt B, IV, p. 1024 bis 1052.

ist M. d'Ocagne (Ingenieur und Professor an der École des Ponts et Chaussées in Paris), Traité de nomographie, Paris 1899. D'Ocagne selbst hat seit 1884 zahlreiche Einzelabhandlungen über diesen Gegenstand veröffentlicht; seine letzte Arbeit hat den Titel: „Sur la résolution nomographique des triangles sphériques", Comptes rendus, Paris 1904, p. 70 bis 72. In Deutschland erschien als erste grundlegende Arbeit über die Nomographie Chr. A. Vogeler, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln, Berlin 1877, während in der Folge besonders die Hrn. A. Adler und R. Mehmke über diesen Gegenstand geschrieben haben. Ich erwähne noch: H. Fürle, Rechenblätter, Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der IX. Realschule, Berlin 1902, sowie meine eigene Schrift: Über die Nomographie von M. d'Ocagne, eine Einführung in dieses Gebiet (Leipzig 1900, 47 Seiten), in der auch die obi-



Figur 45. Graphischer Fahrplan, gültig vom 1. Mai 1904.

gen drei Beispiele näher besprochen sind. Für uns kommen natürlich, wie ich ausdrücklich hervorheben möchte, wesentlich die Methoden in Betracht, wie solche Rechenblätter zu zeichnen sind, doch muß ich näher darauf einzugehen mir hier versagen.

Eine in naher Beziehung zu diesen Betrachtungen stehende praktische Anwendung bieten die im amtlichen Verkehr gebräuchlichen graphischen Eisenbahnfahrpläne dar, wofür Figur 45 ein Beispiel gibt. Sie gestatten zu jeder Zeit den Ort des einzelnen Zuges und ähnliches abzulesen; die Geschwindigkeit des Zuges wird ferner durch tg α gegeben, wo α der Neigungswinkel seiner Geraden gegen die Ordinatenlinie ist.

Daß endlich auch die abstrakteste aller mathematischen Disziplinen, die Zahlentheorie, zu graphischen Darstellungen Anlaß gibt, zeigt die auf Zahlengitter sich stützende geometrische Behandlung der quadratischen Formen, die bereits C. F. GAUSS vielfach bei seinen kristallographischen Arbeiten verwandt hat.[1])

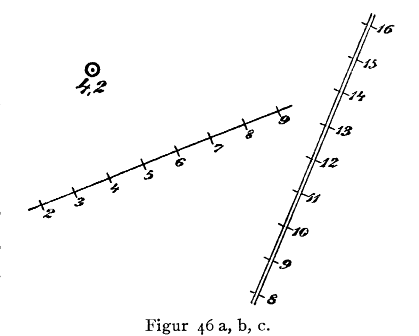
VI. Geodäsie.

Haben wir bisher die Beziehungen der darstellenden Geometrie zu den Nachbargebieten der Mathematik und Physik besprochen, so wenden wir uns nunmehr den Anwendungen in praktischen Gebieten zu. Man kann oft beobachten, daß dem Schüler die Anwendungen auf einfache praktische Aufgaben die größten Schwierigkeiten bereiten, obwohl die entsprechenden theoretischen Aufgaben ihm sehr verständlich sind. Dies muß um so mehr Veranlassung sein, in den theoretischen Unter-

1) C. F. GAUSS, Gesammelte Werke, Bd. II (1876) p. 188 ff. und p. 305, sowie
A. BRAVAIS, Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués regulièrement, Journal de l'École Polytechnique, Cah. 33, 1848, mit anderen kristallographischen Arbeiten als Buch erschienen: Études cristallographiques, Paris 1866, in deutscher Übersetzung von C. und E. BLASIUS, Ostwalds Klassiker, Nr. 90, Leipzig 1897;
L. SOHNCKE, Entwicklung einer Theorie der Kristallstruktur, Leipzig 1879 und
A. SCHÖNFLIES, Kristallsysteme und Kristallstruktur, Leipzig 1891.
Von neueren zahlentheoretischen Arbeiten vgl. etwa:
F. KLEIN, Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie, Vorlesungen, gehalten im Winter 1895/96, ausgearbeitet von A. SOMMERFELD, autogr. erschienen bei B. G. Teubner, Leipzig 1896, sowie ein demnächst erscheinendes Buch von
H. MINKOWSKI, Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig 1904.

richt nach Möglichkeit praktische Beispiele einzuflechten. Wir wollen nun zunächst die Geodäsie einschließlich der Markscheidekunst und Nautik besprechen. Die rechnenden und beobachtenden Methoden, die sie zumeist benutzt, werden uns hier weniger angehen. Ihretwegen verweise ich auf die Abhandlung von Hrn. E. Wiechert, Einführung in die Geodäsie, in den Veröffentlichungen des früheren Ferienkursus (vgl. Anm. p. 63), insbesondere auch auf die dort p. 111—112 angegebene Literatur, und nenne daraus besonders, was die Verwendung der Geodäsie in der Schule betrifft, G. Degenhardt, Praktische Geometrie auf dem Gymnasium, Programm, Frankfurt a. M. 1896. Natürlich findet sich auch bei dieser Behandlung der Geodäsie vielfach Gelegenheit, exakte Zeichnungen auf Grund der Messungen und Ausrechnungen auszuführen. Ich kann Ihnen hier einige recht schön ausgeführte Blätter vorlegen, welche in den von Hrn. Wiechert abgehaltenen Übungen angefertigt sind; sie stellen eine Nivellierung und eine Kleinvermessung in den Wallanlagen Göttingens dar.

Wir wollen aber jetzt solche hierher gehörige Anwendungen näher besprechen, die noch mehr von den Methoden der darstellenden Geometrie Gebrauch machen.[1]) Ich nenne zunächst die wichtige Darstellungsart der kotierten Projektionen (Fig. 46 a, b, c). Ein Punkt des Raums wird durch den Fußpunkt seines Lotes auf die Zeichenebene und eine beigesetzte Ziffer („Kote"), welche seine Höhe über der Ebene angibt, gegeben, eine Gerade durch ihre orthogonale Projektion, der in gleichen Abständen die Koten ihrer einzelnen Punkte beigefügt sind („kotierte oder graduierte Gerade"), eine Ebene endlich durch die orthogonale Projektion einer Fallinie, die man zum Unterschied von der Darstellung der Geraden doppelt auszieht, und ihre Graduierung („Gefällemaßstab"). Letztere deutet zugleich die Projektionen der Höhenkurven (Isohypsen) der Ebene an, die senkrecht zu der Pro-



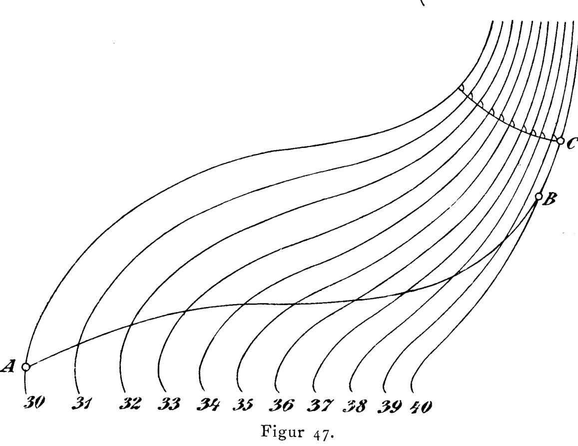
Figur 46 a, b, c.

1) Vgl. auch die Anwendungen der Photogrammetrie in der Geodäsie p. 164—176.

jektion der Fallinie verlaufen. Bereits über die Verknüpfung dieser Elementargebilde bieten sich von selbst mannigfache Aufgaben dar; ich nenne etwa folgende: Die Schnittlinie zweier durch ihren Gefällemaßstab gegebenen Ebenen zu zeichnen und zu graduieren.

Ihre Verallgemeinerung findet diese Methode bei der Darstellung der „topographischen Fläche“, einer mit Höhenkurven versehenen Karte (Generalstabskarten). Hierfür möge folgendes Beispiel sich anschließende Aufgaben andeuten[1]):

Es sei ein Terrain durch seine Horizontalkurven bei bekanntem Maßstab (etwa 1 : 200 für Höhen und Längen) gegeben und gesucht:



Figur 47.

a) die Lage einer *Linie von konstanter Steigung* zwischen zwei gegebenen Punkten A und B des Terrains (Lösung durch ein Näherungsverfahren);

b) die *Linie des stärksten Gefälles* von einem gegebenen Punkt C des Terrains aus (Fig. 47).[2])

Wir gewinnen hier unmittelbaren Anschluß an Probleme der Variationsrechnung, wie der Aufsatz von Hrn. E. Zermelo,

---

1) Näheres über kotierte Projektionen finden Sie in Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I, p. 25 und p. 100—103, Leipzig 1884, Bd. II, p. 388—402, Leipzig 1887, sowie in

G. A. v. Peschka, Kotierte Ebenen und deren Anwendungen, Brünn 1877.

Von speziellen Arbeiten sei genannt: S. Finsterwalder, Über den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche, Sitzungsberichte der Kgl. Bayerischen Akademie, math.-phys. Klasse Bd. XX, München 1890, p. 35—82.

2) Um eine deutliche Vorstellung von dem beispielsweise durch Fig. 47 dargestellten Terrain zu erhalten, schneide man aus starker Pappe einzelne Stücke aus, die je durch eine der Höhenkurven begrenzt werden, und klebe sie so aufeinander, daß die Projektionen der Kanten auf das unterste Stück die Fig. 47 ergeben. Das so entstehende treppenförmige Terrain ist dann nur noch abzuschrägen.

Zur Theorie der kürzesten Linien, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XI, Leipzig 1902, p. 184 bis 187 näher erkennen läßt. Dort wird z. B. für zwei Punkte einer topographischen Fläche die kürzeste unter allen Verbindungslinien gesucht, deren Steilheit eine gegebene Grenze $\varkappa_0$ nicht überschreitet, „ein Problem, wie es praktisch angenähert verwirklicht ist beim Bau von Gebirgsstraßen". Die Lösungen dieses Problems setzen sich zusammen aus kürzesten geodätischen Linien, soweit sie nirgends zu steil sind, und aus Kurven konstanter Steilheit $\varkappa_0$ („Kletterkurven"). Doch auch nach mancher anderen Richtung finden wir den Anschluß an höhere geometrische Untersuchungen, beispielsweise an die Theorie der Flächen gleichförmiger Neigung[1]), sowie an die Cyklographie von Hrn. W. Fiedler.[2])

Ich möchte Ihnen schließlich noch einige kleinere praktische Aufgaben mitteilen, die sich an die Topographie anschließen, und zwar ebensowohl mit den Methoden der kotierten Projektionen wie auch zweckmäßig mit den gewöhnlichen Methoden der darstellenden Geometrie zu lösen sind. Letzteres macht die Aufgaben besonders für den Elementarunterricht brauchbar.

Aufgabe 1. Es soll ein Weg von gegebener Breite b und gegebenem Steigungswinkel α den gezeichnet vorliegenden Damm bis zum Punkt D gerade hinauf

---

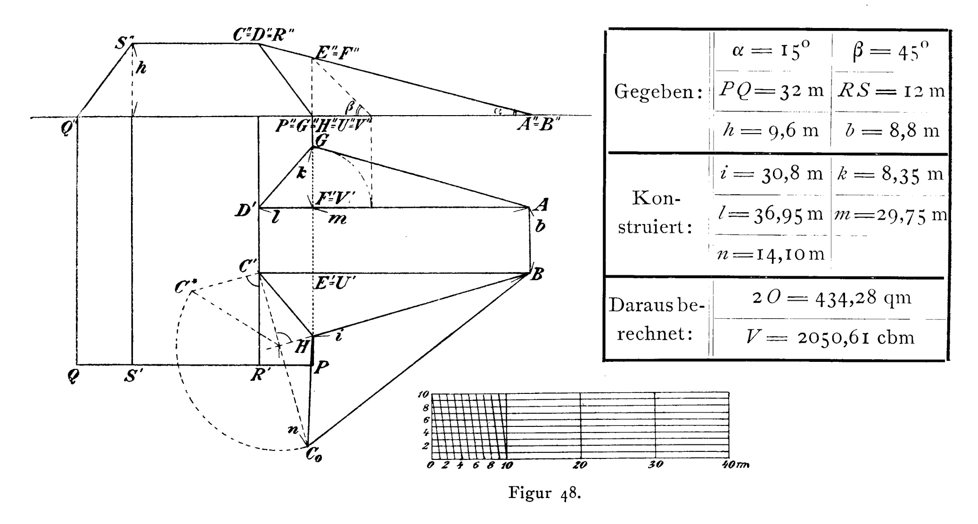
1) Eine Fläche gleichförmiger Neigung ist eine solche abwickelbare Fläche, deren Böschungsebenen (Tangentialebenen) alle gleich geneigt sind gegen eine feste horizontale Ebene. Ist insbesondere die „Leitlinie" in der Grundrißebene, d. h. die in ihr gelegene Schnittlinie der Fläche, vom zweiten Grade, so ist die Fläche gleicher Neigung von der vierten Klasse. Vgl. J. de la Gournerie, Géométrie déscriptive, Bd. II, 2. Aufl., Paris 1880, p. 105—127; Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. II, p. 387—388; F. Auerbach, Die Gleichgewichtsfiguren pulverförmiger Massen, Annalen der Physik, IV. Folge, Bd. V, Leipzig 1901, p. 170—219, woselbst diese Flächen als erste Annäherung der über einer geschlossenen Kurve in einer horizontalen Ebene errichteten Sandhaufen vorkommen.

2) Vgl. W. Fiedler, Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme, Leipzig 1882. Ein Punkt wird hier durch den Fußpunkt seines Lotes auf die Zeichenebene und den Kreis um diesen mit der Höhe als Radius dargestellt. Dies Verfahren erweist sich z. B. besonders nützlich zur Behandlung des Appollonischen Problems über Kreis- und Kugelberührungen (vgl. p. 161 ff. daselbst).



geführt und unter gegebenem Winkel β abgeböscht werden (Fig. 48).[1])

Aufgabe 2. Den schräg auf einen Damm führenden



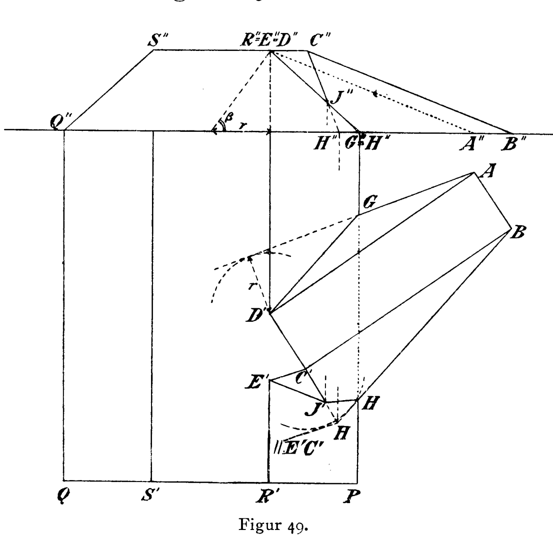
Gegeben:	$\alpha = 15^\circ$	$\beta = 45^\circ$
	$PQ = 32$ m	$RS = 12$ m
	$h = 9{,}6$ m	$b = 8{,}8$ m
Konstruiert:	$i = 30{,}8$ m	$k = 8{,}35$ m
	$l = 36{,}95$ m	$m = 29{,}75$ m
	$n = 14{,}10$ m	
Daraus berechnet:	$2O = 434{,}28$ qm	
	$V = 2050{,}61$ cbm	

Figur 48.

Weg $ABCD$ unter gegebenem Winkel β abzuböschen (Fig. 49).

Aufgabe 3. Über einem durch die Ebene (e_1, e_2) dargestellten abfallenden Gelände ein horizontales, ebenes Terrain mit gegebenem Grundriß $ABCD$ abzuböschen bei gegebenem Böschungswinkel $\beta = 60^\circ$ (Fig. 50).

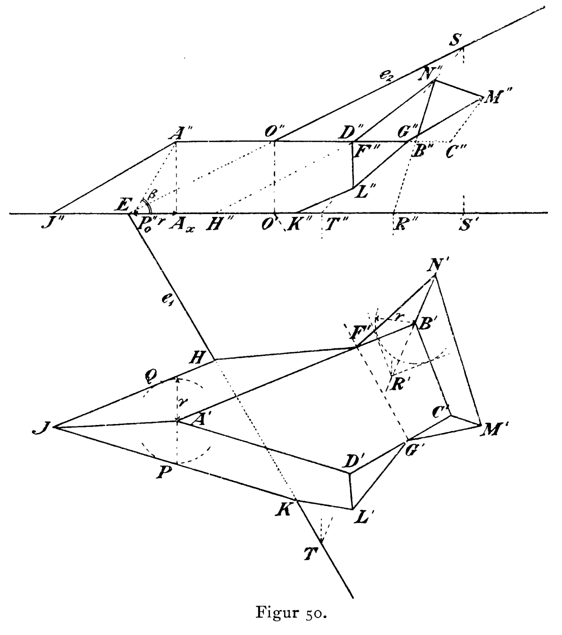
Aufgabe 4. In dem gezeichnet vorliegenden Ufergelände die Böschungsflächen einer über den Fluß zu legenden horizontalen Eisenbahnspur $ABCD$ zu



Figur 49.

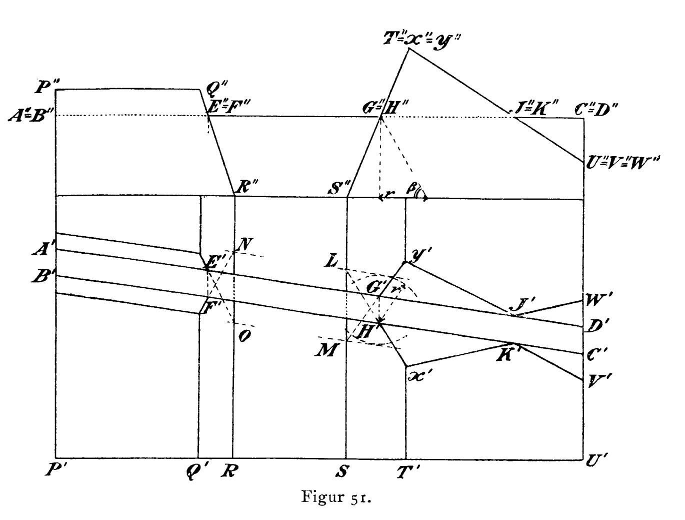
1) In dieser Figur ist der Winkel α der bequemen Zeichnung wegen gleich 15° gewählt, was einer Steigung von 1 : 3,7 entspricht. Da diese Steigung selbst

konstruieren, die im Grund- und Aufriß gegeben ist, (Böschungswinkel $\beta = 60^\circ$, Fig. 51, $MO \parallel LN \parallel A'D'$).



Figur 50.

Auf die Lösungen dieser Aufgaben, wie sie durch die Figuren gegeben werden, kann ich hier im einzelnen nicht eingehen; ich will nur hervorheben, daß sie sich auf die Hilfsaufgabe stützen: Durch eine gegebene (horizontale oder geneigte) Gerade die Ebenen unter gegebener Neigung β gegen die Grundrißebene zu legen. Doch möchte ich noch bemerken, daß sich Gelegenheit bietet, einmal den Schüler zur Anfertigung kleiner Modelle zu diesen Aufgaben anzuregen, sodann aber zu den Sätzen der rechnenden Stereometrie Beziehung zu nehmen. So ist beispielsweise in Fig. 48 die wahre Größe $2\,O = i \cdot n$ der beiden Böschungsflächen AGD und BHC und das Volumen V der zur



Figur 51.

---

für Fußgänger zu groß ist (vgl. E. Wiechert, Einführung in die Geodäsie, Ferienkursvorträge, gesammelt von F. Klein und E. Riecke, Leipzig 1900, p. 90—91), so mag man den Weg mit Treppenstufen versehen annehmen.

Aufschüttung des Weges nötigen Erdmasse als Summe des Volumens $V_1 = \frac{mh \cdot b}{2}$ des dreiseitigen Prismas $ADV\,BCU$ und des doppelten Volumens $2\,V_2 = \frac{mh \cdot k}{3}$ der dreiseitigen Pyramide $BCUH$ berechnet, wozu die nötigen Stücke aus der Zeichnung entnommen wurden, soweit sie nicht gegeben sind. Da auch für die gegebenen Stücke bestimmte Zahlenwerte angenommen sind, so können die Größen O und V auch rein rechnerisch ermittelt werden und die so gefundenen Resultate mit den aus der Zeichnung entnommenen verglichen werden, um eine Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung zu haben (vgl. p. 25 ff.).[1]) Eine Fortsetzung dieser Aufgaben bildet die Methode des Auf- und Abtragens für die Ebenung eines hügeligen Terrains (Massenausgleichung, Calcul de profils de remblai et de déblai).[2])

VII. Astronomie und mathematische Geographie.

Ich erwähne zuerst die Gnomonik, d. h. die Kunst, Sonnenuhren zu konstruieren, die ja besonders im Mittelalter bis ins 15. Jahrhundert hinein von der höchsten praktischen Bedeutung war. Die ihnen gemeinsame Einrichtung besteht bekanntlich darin, daß durch die Länge des Schattens, den ein von der Sonne beschienener Stab („Gnomon") auf eine Ebene wirft, die Zeit (wahre Sonnenzeit) angegeben wird. Meist wird der Stab parallel zur Erdachse gewählt. Steht dann noch die Ebene senkrecht zum Stab, so bekommen wir die einfachste

1) Die Anregung zu den Aufgaben 1 und 2 verdanke ich Hrn. G. Hauck, der auch kleine zugehörige Modelle in seiner Sammlung besitzt. Aufgaben ähnlicher Art aus der Markscheidekunst (dem geodätischen Messen beim Bergbau) siehe bei E. Gerland, Erster kurzer Abriß der darstellenden Geometrie, Leipzig 1899; vgl. auch C. H. Müller und O. Presler, l. c. p. 188—194, sowie die Anmerkungen 96 und 97, p. 314 daselbst.

2) Vgl. E. Gieseler, Lehrbuch des Erdbaues, Bonn 1895, 2. Aufl.;

F. W. Dünkelberg, Encyklopädie und Methodologie der Kulturtechnik, Bd. I, Braunschweig 1883, p. 433—482;

A. Goering, Massenermittelung, Massenverteilung und Transportkosten der Erdarbeiten, Berlin 1890, 2. Aufl.;

G. Dariès, Cubature des terrasses et mouvement des terres, Paris 1895; sowie die umfassende theoretische Arbeit:

P. Appell, Mémoire sur les déblais et les remblais des systèmes continus ou discontinus, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, t. 29, Paris 1886.

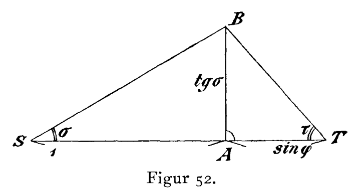
Art des „Zifferblattes"; man braucht einfach nur um den Fußpunkt des Stabes einen Kreis zu beschreiben, ihn durch Radien in 24 gleiche Teile zu teilen und die also um je 15° voneinander abstehenden Teilpunkte mit den Stundenziffern zu versehen. Die Uhr ist dann so zu orientieren, daß der 12 Uhr Mittags zeigende Radius mit dem Meridian des Ortes zusammenfällt. Zu bemerken ist jedoch noch, daß im Sommer auf die eine, im Winter auf die andere Seite der Ebene dieser „Äquatorialuhr" der Schatten des die Ebene durchdringenden Stabes fällt. Aus diesem einfachen Fall ergeben sich aber leicht auch die anderen Konstruktionen der Sonnenuhren. Man kann, während der Stab wieder zur Erdachse parallel ist, die Ebene auch horizontal („Horizontaluhr") oder vertikal („Vertikaluhr") wählen und im letzteren Falle sie von Westen nach Osten („Mittags- und Mitternachtsuhr") oder von Norden nach Süden („Morgen- und Abenduhr") orientieren. Die Eigenarten dieser verschiedenen Ausführungen sich zu überlegen, darf ich Ihnen wohl selbst überlassen. So zeigt beispielsweise die Mittagsuhr nur an den Tagen der Tag- und Nachtgleiche die Zeit von 6 Uhr morgens bis 6 Uhr abends an, sonst stets weniger. Erwähnen will ich nur noch, daß für die geographische Breite φ der Winkel σ, den der Schatten des Stabes zu einer beliebigen Zeit mit dem im Meridian liegenden Schatten um 12 Uhr mittags bildet, für die Horizontaluhr durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \sigma = \sin \varphi \operatorname{tg} \tau ,$$

für die von Westen nach Osten orientierte Vertikaluhr durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \sigma = \cos \varphi \operatorname{tg} \tau$$

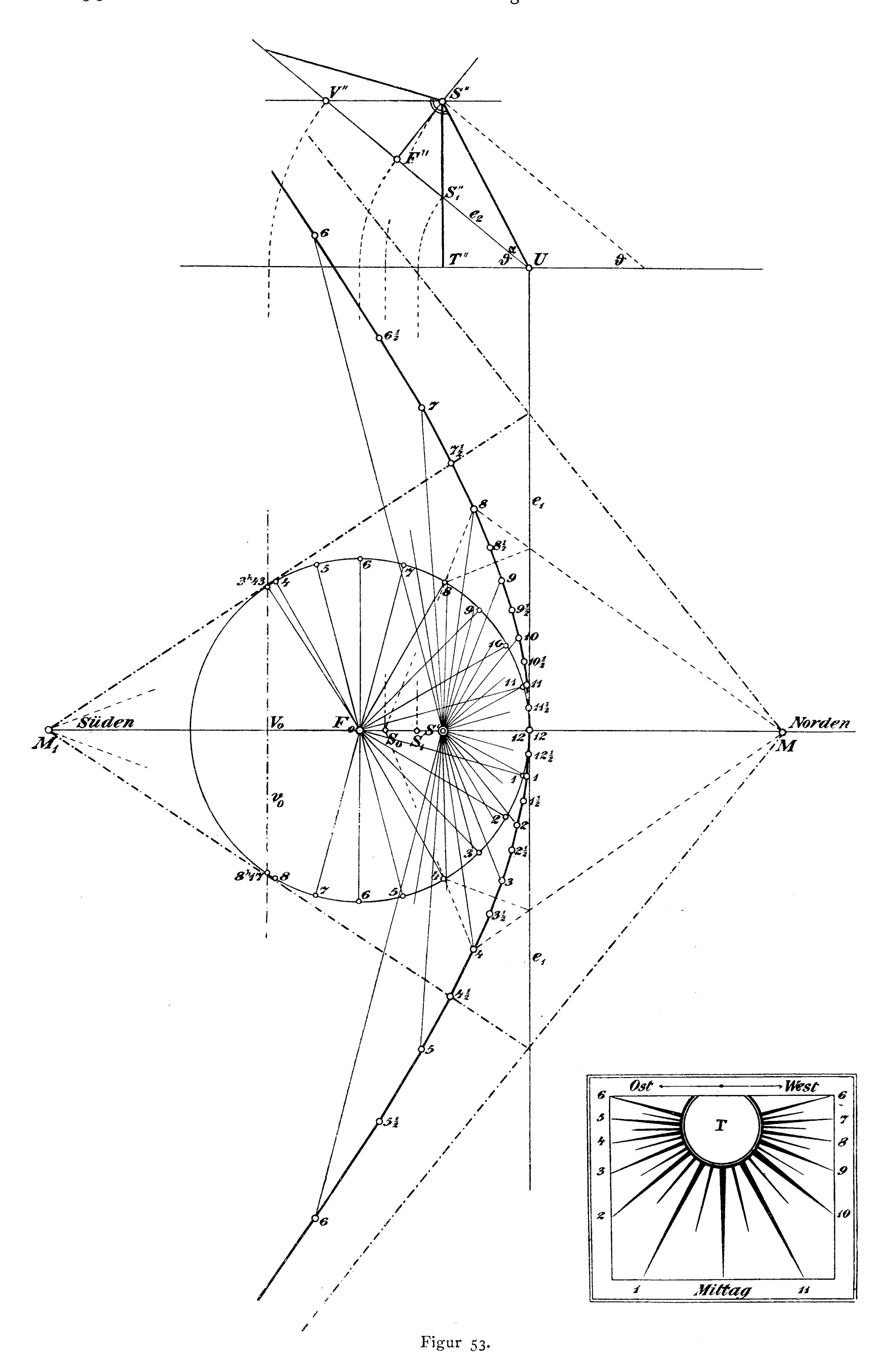
gegeben wird, wo τ den Stundenwinkel der Sonne, d. h. den dem Winkel σ bei der Äquatorialuhr entsprechenden Winkel bezeichnet. Aus diesen Formeln läßt sich eine einfache Konstruktion von σ bei gegebenem φ und τ ableiten, wie sie die Figur 52 z. B. für den ersten Fall angibt.



Figur 52.

Die Figur 53 gibt die Ausführung der folgenden speziellen Aufgabe:

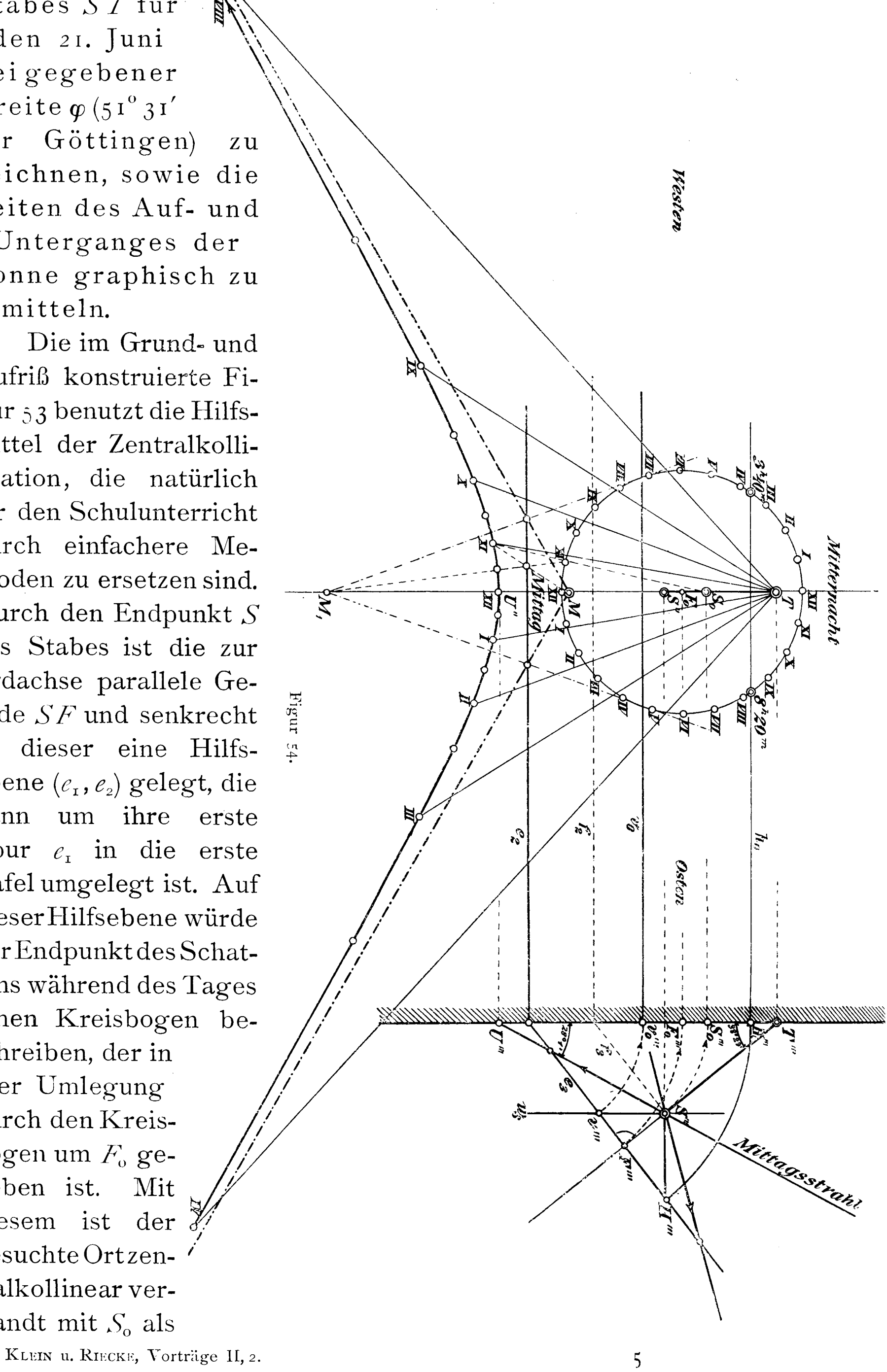
Den Ort für den Schatten des Endpunktes eines auf der horizontalen ersten Tafel senkrecht stehenden



Figur 53.

Stabes ST für den 21. Juni bei gegebener Breite φ (51° 31′ für Göttingen) zu zeichnen, sowie die Zeiten des Auf- und Unterganges der Sonne graphisch zu ermitteln.

Die im Grund- und Aufriß konstruierte Figur 53 benutzt die Hilfsmittel der Zentralkollineation, die natürlich für den Schulunterricht durch einfachere Methoden zu ersetzen sind. Durch den Endpunkt S des Stabes ist die zur Erdachse parallele Gerade SF und senkrecht zu dieser eine Hilfsebene (e_1, e_2) gelegt, die dann um ihre erste Spur e_1 in die erste Tafel umgelegt ist. Auf dieser Hilfsebene würde der Endpunkt des Schattens während des Tages einen Kreisbogen beschreiben, der in der Umlegung durch den Kreisbogen um F_0 gegeben ist. Mit diesem ist der gesuchte Ort zentralkollinear verwandt mit S_0 als



Figur 54.

Zentrum der Kollineation, wo S_0 der ebenfalls in die erste Tafel umgelegte Punkt S ist. Der gesuchte Ort ist ein Hyperbelast; die seinen Asymptoten entsprechenden Kreistangenten berühren den Kreis in den Punkten, deren Stundenziffern die Zeiten des Auf- und Unterganges der Sonne, nämlich $3^h 43^{min}$ und $8^h 17^{min}$, angeben. — Die im Grund- und Seitenriß gezeichnete Figur 54 gibt die Konstruktion für eine solche Abänderung der obigen Aufgabe, daß der Stab ST der Erdachse parallel und die Ebene der Sonnenuhr vertikal und von Westen nach Osten orientiert ist (Mittagsuhr).

Die älteste geschichtlich erwähnte Sonnenuhr ist die des Königs Abas (730 v. Chr., vgl. 2 Kön. 20, 9—11). Eine recht interessante Sonnenuhr, die z. B. auch zu jedem Sonnenstande (ohne daß man den Mittag abzuwarten braucht) die Mittagshöhe der Sonne abzulesen gestattet, ist von Herrn Geheimrat F. Reuleaux konstruiert.[1]) Zum weiteren Studium sei auf die Literatur verwiesen.[2])

Zweitens will ich noch kurz auf die Lehre von den Kartenprojektionen hinweisen. Ich kann Ihnen hier eine Reihe von Zeichnungen (Merkator-, Globular-, Kegel-, Flamsteedprojektionen usw.) vorlegen, die ich selbst als Sekundaner angefertigt

---

1) Das Original ist in seinem Garten aufgestellt; die Sonnenuhr wird angefertigt vom Mechaniker Meißner, Berlin, Friedrichstr. 71 (Preis 300 Mark). Wegen ihrer Beschreibung vgl. den Aufsatz „Die Uhrenausstellung in der Urania", Deutsche Uhrmacherzeitung, XXII. Jahrgang, Berlin 1898, p. 472 ff. Dort sind auch interessante indische Pilgerstäbe beschrieben, die den Dienst einer Sonnenuhr versehen; einen solchen besitzt jetzt das Museum für Zeitmeßkunde in Schramberg.

2) Es sei genannt:

K. von Littrow, Gnomonik, 2. Aufl., Wien 1838;

R. Sonndorfer, Theorie und Konstruktion der Sonnenuhren, Wien 1864;

J. Mollet, Gnomonique graphique, 7. Aufl., Paris 1884;

R. Wolf, Handbuch der Astronomie, Erster Halbband, Zürich 1890, p. 429 ff., woselbst p. 432—433 besonders die ältere Literatur des 16. und 17. Jahrhunderts zusammengestellt ist.

P. Kramer († als Schulrat in Magdeburg), Darstellende Geometrie am Realgymnasium, Programm, Halle a. S. 1890 (daselbst im Anhang p. 28 ff. „Über Sonnenuhren" in Anschluß an die Darstellung in C. F. A. Leroy, Traité de stéréotomie, 13. Aufl., Paris 1898, p. 175—193).

Ein historisch interessantes Buch, das ich Ihnen in einem Exemplar unserer Sternwarte vorlegen kann, ist:

J. S. Doppelmayr, Neue und gründliche Anweisung, wie nach einer universalen Methode große Sonnenuhren ... zu verzeichnen, Nürnberg 1719.

habe, und ich erinnere mich gern, welche Freude es mir machte, unserem philologisch gebildeten Lehrer bei der mathematischen Ausgestaltung seines Unterrichts behilflich zu sein. Bekannt ist ja auch die innige Beziehung, welche die zuerst von Hipparch (160—125 v. Chr.) entwickelte, später von Ptolemäus vervollkommnete stereographische Projektion zur Transformation der reziproken Radien, mit ihr viele andere Projektionen zur Flächentheorie (konforme und flächentreue Abbildungen[1])), die Merkatorprojektion zur Nautik besitzen (Abbildung der Loxodrome, d. h. der von einem Schiff bei unverändertem Kurs beschriebenen Kurve).[2]) Ich will mich damit begnügen, die wichtigsten Lehrbücher zu nennen:

K. Zöppritz, Leitfaden der Kartenentwurfslehre, Leipzig 1884;

A. Tissot, Die Netzentwürfe geographischer Karten nebst Aufgaben über Abbildung beliebiger Flächen aufeinander, deutsch von E. Hammer, Stuttgart 1887;

H. Zondervan, Allgemeine Kartenkunde, ein Abriß ihrer Geschichte und Methoden, Leipzig 1901.

Eine erste Einführung gewährt auch

E. Gelcich, F. Sauter und P. Dinse, Kartenkunde (Sammlung Göschen Nr. 30), Leipzig 1901).[3])

VIII. Kristallographie.

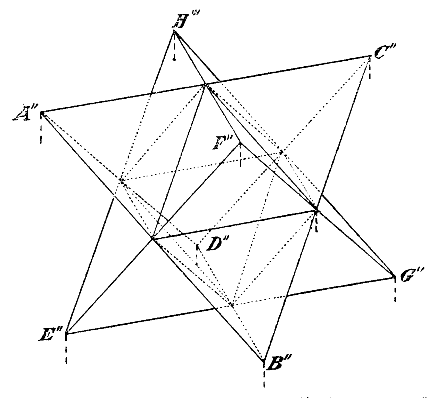
Auch von dieser Anwendung der darstellenden Geometrie brauche ich Ihnen nicht ausführlich zu berichten, da sie Ihnen

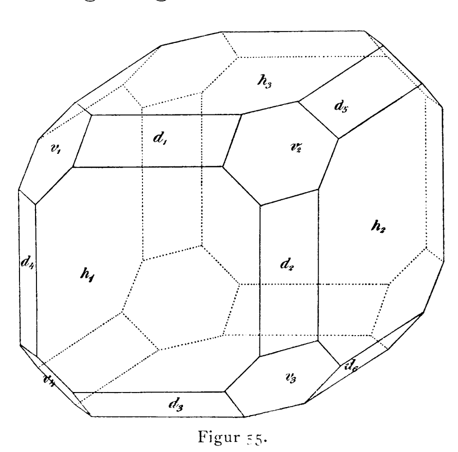
1) Vgl. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1901, p. 83—89.

2) Da die Loxodrome von einem beliebigen Punkt bis zum Asymptotenpunkte eine endliche Bogenlänge besitzt, so ist auch die Zeit endlich, welche ein Schiff gebrauchen würde, um bei konstanter Geschwindigkeit auf einer Loxodrome den Nordpol zu erreichen.

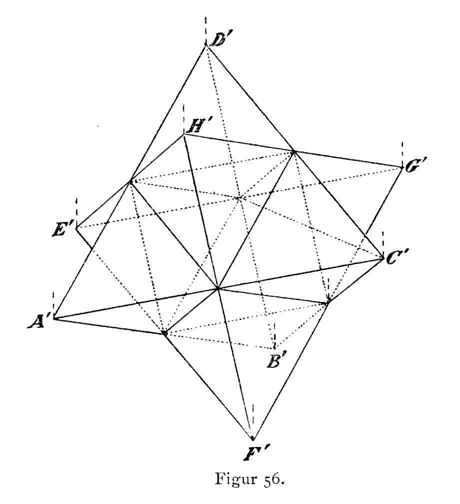
3) Hr. G. Holzmüller geht in seinen Schriften auch vielfach auf die Kartenkunde ein, man sehe z. B.: Elemente der Stereometrie, Bd. II p. 373, Leipzig 1886; als Sonderabdruck aus der Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht, Bd. XIV erschien: Einige Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Kartographie, die mit der Theorie der isogonalen Verwandtschaften zusammenhängen, Leipzig 1883. — Eine Reihe kleinerer Aufgaben der mathematischen Erd- und Himmelskunde geben auch C. H. Müller und O. Presler l. c., p. 83—95, 166—179, 194—196, 277—293. Historisch wichtig ist J. H. Lambert, Anmerkungen und Zusätze zum Entwerfen der Land- und Himmelskarten, 1772, neu herausgegeben in Ostwalds Klassikern Nr. 54 von A. Wangerin.

allen wohlbekannt ist und auch in vielen elementaren Lehrbüchern der darstellenden Geometrie das Zeichnen von Kristallen behandelt wird.[1]) Der Zielpunkt beim Unterricht muß indes nicht nur die anschauliche Wiedergabe, sondern auch das Studium der geometrischen Eigenschaften der Kristalle an den Figuren in enger Beziehung zu den Betrachtungen der Stereometrie sein. Die Figur 55 zeigt beispielsweise einen Würfel mit den geraden Abstumpfungen seiner Ecken und Kanten. Die abstumpfenden Flächen bilden für sich bei hinreichender Verlängerung bez. ein Oktaeder und





Figur 55.



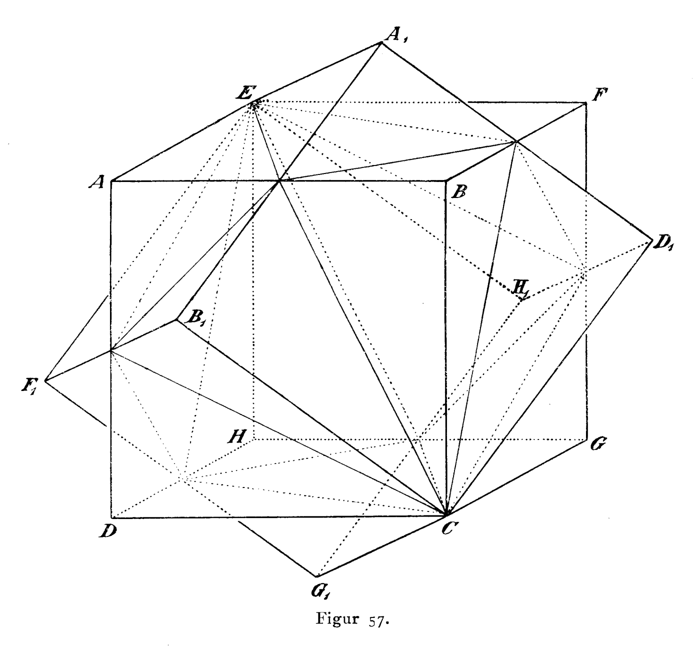
Figur 56.

ein Rhombendodekaeder. Besonders die Zwillingskristalle bieten vortreffliche, zwar auch schwierigere Übungsaufgaben dar, z. B. gibt Figur 56 die Vereinigung zweier regulärer Tetraeder im Grund- und Aufriß, Figur 57 eine solche zweier Würfel (Zwillingskristall des Flußspats) in Kavalierperspektive. Doch haben die Kristallographen noch andere Projektionsarten ausgebildet, von denen ich folgende beiden nenne:

a) Die Zeichenebene wird zu einer ausgewählten Ebene des Kristalls parallel angenommen, und alle Flächen des Kri-

1) Wegen der Beziehung der Kristallographie zur Zahlentheorie vgl. p. 58, Anm. 1.

stalls werden parallel mit sich verschoben gedacht, bis sie durch einen im Abstande 1 von der Zeichenebene gewählten Punkt gehen. Die Schnittgeraden dieser Parallelebenen mit der Zeichenebene sollen die einzelnen Flächen veranschaulichen. Es ist klar, daß die zur Zeichenebene parallelen Kristallflächen sich in der unendlich fernen Geraden abbilden, andererseits je zwei parallele Kristallflächen dieselbe Gerade liefern. Diese



Figur 57.

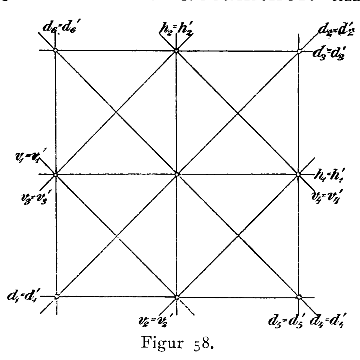
Projektionsmethode wurde von F. E. Neumann (1823) eingeführt und nach dem Vorschlage von F. A. Quenstedt als Linearprojektion bezeichnet.

b) Um den Kristall denkt man sich eine Kugel gelegt und von ihrem Mittelpunkt aus auf alle Kristallflächen die Lote gefällt; ihre Schnittpunkte mit der Kugel sind alsdann die Abbilder der Flächen. Um hieraus eine ebene Zeichnung zu erhalten, wendet man auf die Kugel die stereographische Projektion an, d. h. die Kugel wird auf eine zweckmäßig gewählte Durchmesserebene, die die Kugel im „Grundkreis“ schneidet, von dem einen Endpunkt des zu dieser Ebene senkrechten Durchmessers aus projiziert (Neumannsche Polarprojektion, ebenfalls 1823 eingeführt).

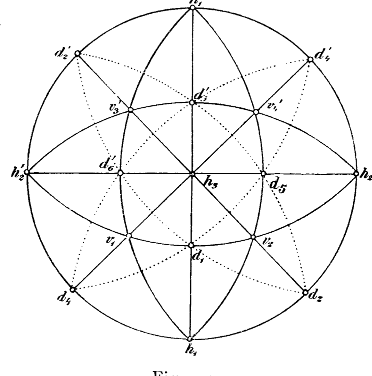
Die Figuren 58 und 59 geben diese beiden Projektionen

für den durch die Figur 55 dargestellten Kristall des regulären Systems, wobei die Geraden und Punkte der Figur 58 und 59 dieselben Buchstaben tragen wie die durch sie abgebildeten Flächen der Figur 55, in der noch den Parallelflächen zu den mit Buchstaben bezeichneten die entsprechenden gestrichenen Buchstaben zugeordnet seien.

Die Vorteile dieser Projektionsarten beruhen darin, daß der Zonenverband der Flächen unmittelbar deutlich hervortritt. (Unter einer „Zone" versteht man die Gesamtheit aller



Figur 58.



Figur 59.

Flächen, die zu derselben Kante parallel sind.) Bei der ersten Projektionsart gehen alle Geraden, welche die Flächen einer Zone darstellen, durch denselben Punkt, bei der zweiten liegen die entsprechenden Punkte der Kugel auf demselben größten Kreise der Kugel und daher bei der stereographischen Abbildung auf einem Kreise durch die Endpunkte eines Durchmessers des Grundkreises in der Zeichenebene oder im speziellen auf einer Durchmessergeraden selbst, und umgekehrt.[1])

1) Aus der Literatur nenne ich folgende mineralogische Lehrbücher:

C. Fr. Naumann, Elemente der Mineralogie, 14. Aufl., bearbeitet von F. Zirkel, Leipzig 1901;

H. Kopp, Einleitung in die Kristallographie, Braunschweig, 2. Aufl. 1862; hierzu 6 Tafeln mit Netzen zu Kristallmodellen, Braunschweig 1885, 5. Aufl.;

G. Tschermak, Lehrbuch der Mineralogie, 5. Aufl., Wien 1897;

Th. Liebisch, Geometrische Kristallographie, Leipzig 1881, sowie Grundriß der physikalischen Kristallographie, Leipzig 1896.

Bei Tschermak sind auf p. 8 noch eine große Reihe weiterer Werke aufgeführt. Eine Zusammenstellung der Kristallformen in Abbildungen ohne Text gibt K. Vrba, Kristallographische Tafeln, 3. Aufl., Prag (jetzt Berlin) 1876.

IX. Architektur.

Überreich ist der Stoff, der sich hier für die Behandlung in der darstellenden Geometrie darbietet. Ich erwähne zunächst von Hrn. G. HAUCK die Vorlagen von Motiven, welche meist der Kunst des Mittelalters und der Renaissance entnommen sind, Übungsstoff für den praktischen Unterricht in der Projektionslehre (Parallel-, Zentralperspektive, Schattenlehre), Berlin 1888, sowie die gleichen Zwecken dienenden Gipsmodelle architektonischer Polyeder (Halle a. S. 1901). Ihre Verwendung, über die auch die beigefügten Schriftchen sich aussprechen, ist eine überaus vielseitige. Wir heben besonders hervor die Übung des Verständnisses der gegebenen Grund- und Aufrisse, ihre Entwicklung zur Körperlichkeit in der inneren Anschauung, die Herstellung des Seitenrisses, des Aufrisses über Eck, der Projektion in beliebiger Stellung, die Umsetzung in Parallelperspektive, die zentralperspektivische und die reliefperspektivische Abbildung, die Ermittelung der Schattengrenzen und Schlagschatten bei den verschiedenen Darstellungen nebst Bestimmung der Beleuchtungsintensitäten der einzelnen ebenen Flächen. Die hier ausgelegten Zeichenblätter, denen die Vorlagen oder Modelle von Hrn. G. HAUCK zugrunde liegen, mögen zur Veranschaulichung dieser Andeutungen

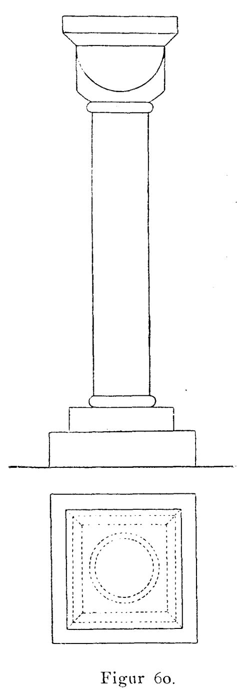
---

Ferner sind für den Unterricht nützlich:

V. VON ZEPHAROWITSCH, Kristallographische Wandtafeln für Vorträge über Mineralogie, Prag 1877,

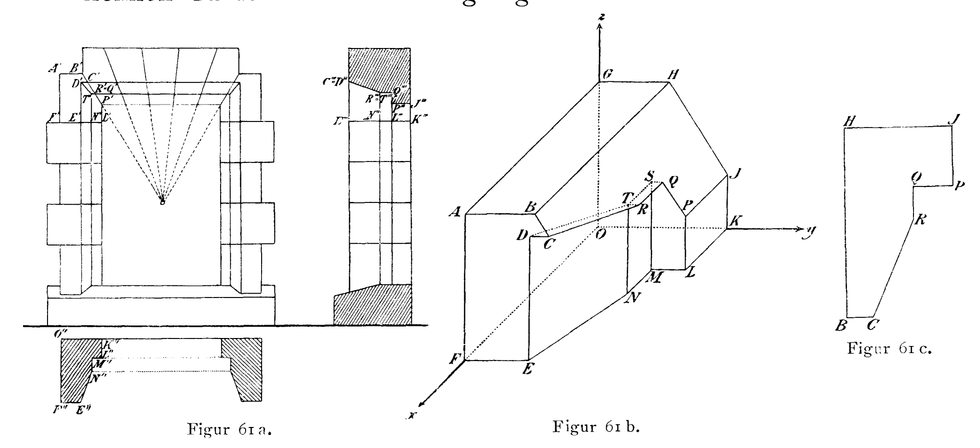
die Sie bei der Besichtigung meines Instituts bereits sahen.

Vgl. auch A. BRAVAIS, Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie, sowie Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique, Journal de mathématiques pures et appliques par Liouville, t. 14, p. 137—140 und p. 141—180, 1849, deutsch von C. und E. BLASIUS in OSTWALDS Klassikern, Nr. 17, Leipzig 1890. Von Behandlungen der Kristallographie in den elementaren Lehrbüchern der darstellenden Geometrie erwähne ich in erster Linie wieder C. H. MÜLLER und O. PRESLER, l. c. p. 62—83, 140—146, sowie die Anmerkungen 35—47. Dort weisen die Verfasser auch auf die Anfertigung von kleinen Pappmodellen der Kristallformen aus ihren Netzen hin, wozu die separat zu beziehenden Netze des Werkes TH. BAIL, Mineralogie, 12. Aufl., Leipzig 1902, empfehlenswert sind. (Vgl. auch G. KÖPP, Geometrische Körpernetze zum Anfertigen von Körpermodellen für den Unterricht in der Geometrie, Bensheim 1887). Ferner nenne ich G. HOLZMÜLLER, Elemente der Stereometrie, Bd. I p. 42 und 47, Bd. II, p. 113 und F. HENRICH, Die stereographische Projektion und ihre Anwendung in der Kristallographie, Programm, Wiesbaden 1897, sowie des letzteren Lehrbuch der Kristallberechnung, Stuttgart 1886.



Figur 60.

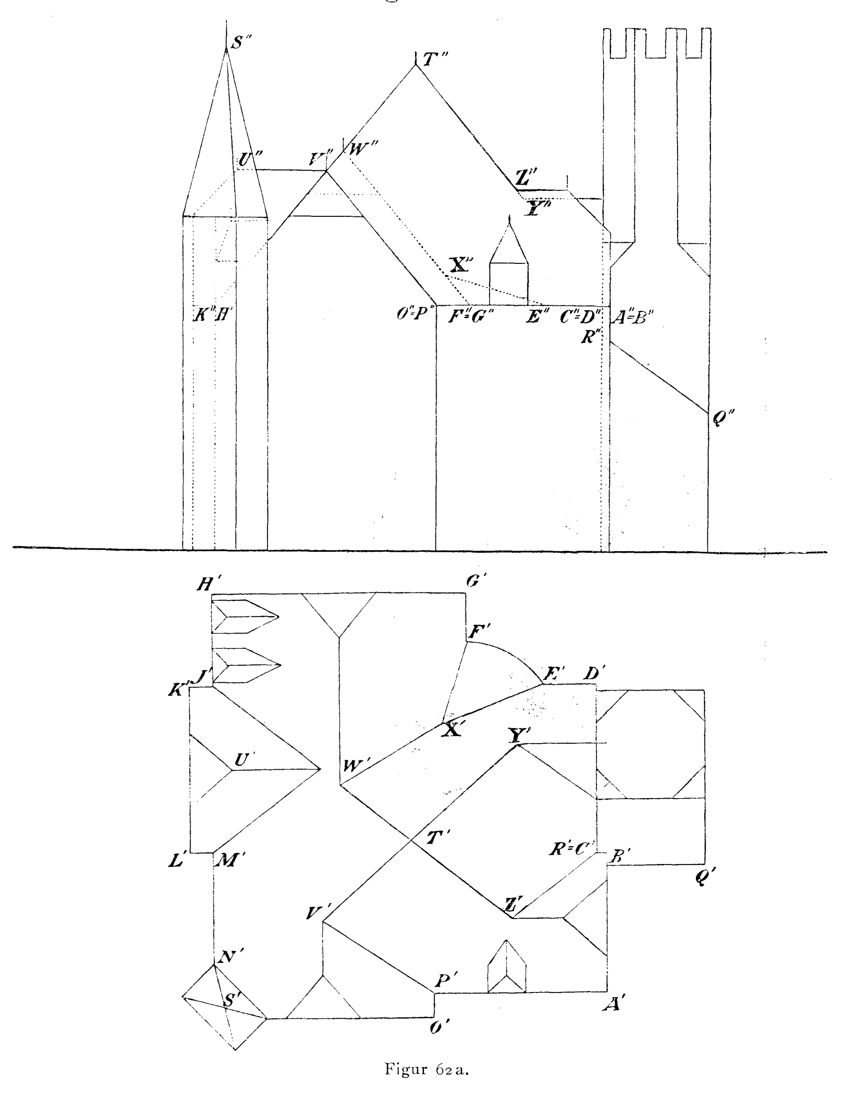
dienen (Beispiel: Fig. 79 p. 97). Doch wird man wünschen, noch einfachere architektonische Gebilde, besonders für den Anfang des Unterrichtes, zu besitzen. Natürlich lassen sich solche auch als einzelne Teile der Motive des Hrn. G. Hauck gewinnen. Zudem bietet sich hier so recht die Gelegenheit, auch in der darstellenden Geometrie Heimatkunde und Heimatkunst zu pflegen, wie dies in der Malerei (Worpsweder Schule) und Literatur (Frenssen, Lienhardt) ja auch zur Zeit modern ist. In der Tat brauchen wir nicht in ferne Gegenden unsern Blick zu lenken und unsere Phantasie frei schweifen zu lassen, denn schon alle die zahlreichen Gegenstände, die uns täglich umgeben, von der Einrichtung des Schulzimmers an, geben uns in reicher Fülle brauchbare Beispiele an die Hand (Fig. 60, Motiv von der Freitreppe des Auditoriengebäudes in Göttingen). Wer ferner Gelegenheit hatte, die in den Übungen der Baukonstruktionen angefertigten Zeichnungen auf unseren Technischen Hochschulen kennen zu lernen oder die gelegentlich von Gewerbeschulen



Figur 61 a. Figur 61 b. Figur 61 c.

veranstalteten Ausstellungen der Schülerzeichnungen im Kunsthandwerk (Kunsttischlerei usw.) zu besuchen, wird auch hier reiche Anregung finden (Mauerwerke, Gebälkverbindungen, Treppenkrümmlinge usw.).

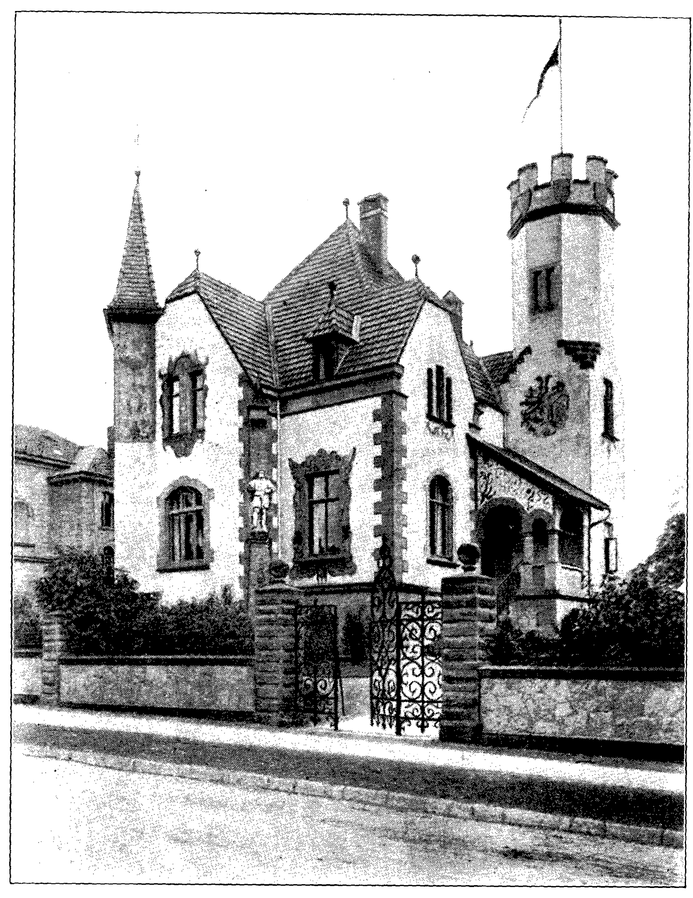
Zwei Aufgabengruppen möchte ich gerade aus diesen letzten Gebieten hervorheben, den Steinschnitt (stéréotomie) und die Dachausmittelung.



Figur 62a.

Der Steinschnitt umfaßt die besonders bei krummflächigen Gebilden recht komplizierte Lehre, wie die einzelnen Steine eines aus Bruchsteinen aufgeführten Bauwerkes in Kavalierperspektive zu konstruieren sind, wesentlich zu dem Zwecke, damit aus diesen Zeichnungen selbst die wahren Maße für die

Fertigstellung der Steine entnommen werden können. Diese Kunst war schon im Altertum bekannt.[1]) Die Figuren 61 a, b, c zeigen die vorgegebenen drei Risse einer Fensterumrahmung und die daraus folgende Konstruktion des links oben befind-

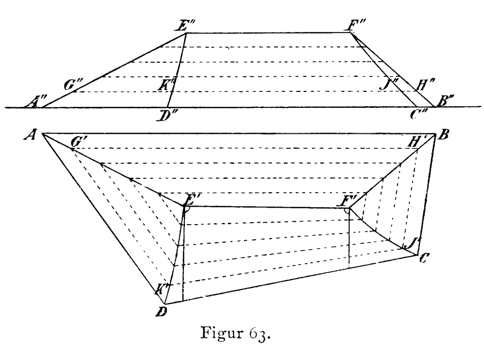


Figur 62b. Corpshaus der Hannovera in Göttingen.

lichen Steines und der wahren Gestalt seiner schrägen Fuge in isometrischer Kavalierperspektive.

1) Vgl. in der Bibel I. Buch der Könige, Kap. 6, Vers 7; dort wird in bezug auf den Tempelbau des Königs Salomo (1000 v. Chr.) gesagt: „Und da das Haus gesetzet ward, waren die Steine zuvor ganz zugerichtet, daß man keinen Hammer noch Beil noch irgend ein Eisenzeug im Bauen hörte." Diese durch die Tyrier ausgeübte Kunst, reich ausgestattete Gebäude aus behauenen Steinen herzustellen, erregte also die höchste Bewunderung der damals wenig kunstgeübten Juden.

Die Lehre von den Dachausmittlungen zeigt, wie über dem gegebenen Grundriß des Gebäudes die Dachflächen unter bestimmten Annahmen, meist bei gegebener Neigung der ebenen Dachflächen, zu errichten und ihre wahren Gestalten zu bestimmen sind. Die Zeichnung (Fig. 62 a) gibt ein solches Beispiel, zu dem ein Gebäude in Göttingen (Fig. 62 b) die Anregung gegeben hat. Ist der Dachgrundriß ein gewöhnliches Viereck $ABCD$, und will man eine horizontale Firstkante EF haben, so pflegt man drei Dachflächen eben, die vierte $CDEF$ als Stück eines hyperbolischen Paraboloids auszubilden, was gewiß besonderes mathematisches Interesse bietet (Fig. 63).[1])



Figur 63.

X. Maschinenlehre oder angewandte Kinematik.

Wir haben schon bei der Betrachtung der reinen Kinematik einzelne kleine technische Anwendungen kennen gelernt,

1) Als Literatur zu diesen Aufgabengruppen nenne ich:

C. F. A. LEROY, Traité de stéréotomie, augmentée d'un supplément: Théorie et construction de l'appareil hélicoidal des arches biaises par J. DE LA GOURNERIE, 2 Bde. (Text und Atlas), 13. Aufl., Paris 1898 (deutsch übersetzt von E. F. KAUFFMANN, Stuttgart 1883);

J. DE LA GOURNERIE, Considérations géométriques sur les arches biaises, Annales des Ponts et Chaussées II, Paris 1851, p. 82—115, Note sur les arches biaises, ebenda V, Paris 1853, p. 281—288, Mémoire sur l'appareil de l'arche biaise, suivi d'une analyse des principaux ouvrages publiés sur cette question, Annales du Conservatoire des Arts et Métiers IX, Paris 1873, p. 352—406 (auch separat erschienen), Expériences pour déterminer la direction des pressions dans les arches biaises, Comptes Rendus 1879, p. 302—308 (Behandlung der Aufgabe, durch einen Eisenbahndamm eine schräg verlaufende Unterführung aus Bausteinen herzustellen),

und die p. 8 genannten technischen Lehrbücher der darstellenden Geometrie von W. H. BEHSE (Bd. II p. 46—93) und J. VONDERLINN (Bd. I p. 72—84 und 159—166 und Bd. II p. 92—125); endlich:

J. WILDT, Praktische Beispiele aus der darstellenden Geometrie für Lehranstalten mit bau- oder kunstgewerblicher Richtung, 2 Lieferungen, Wien 1895 und 1902.

Wegen der Anwendungen der Photogrammetrie in der Architektur vgl. p. 159—164.

die eine unmittelbare Veranschaulichung der theoretischen Sätze darstellten. Naturgemäß bietet die Praxis des Maschinenbaues zahlreiche weitere solche Anwendungen dar, bei denen die geometrische Anschauung eine wesentliche Rolle spielt, wenn auch darüber hinaus dynamische Vorgänge (Elastizität, Reibung, thermodynamische Prozesse usw.) im Vordergrunde stehen. Ich denke indes weniger an solche Aufgaben, wie sie der praktische Ingenieur immer unter Händen hat, einzelne Teile der Maschine (Schraubenkörper, Achsenlager, Kreuzkopf, Riementrieb usw.) durch Zeichnungen zu veranschaulichen, was gewiß auch gute Übungsbeispiele bietet. Vielmehr möchte ich neben der geometrischen Theorie der Steuerungen ein für uns besonders interessantes Gebiet der Maschinenlehre erwähnen, das von den geometrischen Sätzen der Kinematik, vor allem von den p. 32 f. entwickelten Sätzen der Polbahnen und der Erzeugung der zyklischen Kurven in umfassender Weise Gebrauch macht, nämlich die Verzahnungstheorie. Es handelt sich hier um das Problem, die Umdrehung um eine fest gelagerte Achse $\mathfrak{A}$ auf eine zweite ebenfalls feste Achse $\mathfrak{B}$ durch Druckkräfte mit Hilfe von Zahnrädern zu übertragen. Je nachdem die Achsen parallel sind, sich schneiden oder kreuzen, unterscheidet man in der Technik Stirnräder (zylindrische Räder), Kegel- und Hyperboloidräder.[1]) Beschränken wir uns auf die erste Art, so kommt geometrisch nur der zu den Achsen senkrechte Querschnitt der beiden Räder in Betracht, und die zu lösende Aufgabe besteht darin, die wesentlichen Begrenzungen der Zähne einem gegebenen Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten für beide Achsendrehungen entsprechend zu konstruieren. Zumeist wird dies Verhältnis konstant sein; für diesen Fall sind als wichtigste Arten der Verzahnung die Zykloiden-, die Triebstock- und die Evolventenverzahnung ausgebildet, je nachdem Bogen von Zykloiden oder von ihren Äquidistanten und Kreise oder Bogen von Kreisevolventen die wesentliche Begrenzung der Zähne bilden. Dem entsprechen

1) Vgl. meinen Aufsatz: Die kinematische Theorie der Hyperboloidenreibungsräder, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 42, Leipzig 1897, sowie: M. Disteli, Über Rollkurven und Rollflächen, ebenda Bd. 43 (1898) und Bd. 46 (1901) und: Über instantane Schraubengeschwindigkeiten und die Verzahnung der Hyperboloidräder, ebenda Bd. 51 (1904).

die drei Methoden der Hilfspolbahnen, der Äquidistanten und der sekundären Polbahnen für die Konstruktion dieser Verzahnungsarten. Die technischen Lehrbücher geben zwar keine dem Mathematiker angepaßte Darstellung dieser Verhältnisse, doch kann ich mich deswegen mit diesen wenigen Andeutungen hier begnügen, weil ich gerade jetzt hierüber einen ausführlichen besonderen Aufsatz veröffentliche: Über neue kinematische Modelle zur Verzahnungstheorie nebst einer geometrischen Einführung in dieses Gebiet.[1]) Da diese Betrachtungen sich immerfort mit den Begriffen Tangente, Normale, Bogenlänge, Krümmungsradius, Evolute, Evolvente, Äquidistante, Enveloppe beschäftigen, so sind sie, wie ich nebenbei bemerke, zugleich auch geeignet, für die Infinitesimalrechnung, insbesondere für die Behandlung der Theorie der ebenen Kurven mit Hilfe der Differentialrechnung sehr geeignete praktische Beispiele zu bieten.

XI. Ingenieurwissenschaften oder angewandte graphische Statik.

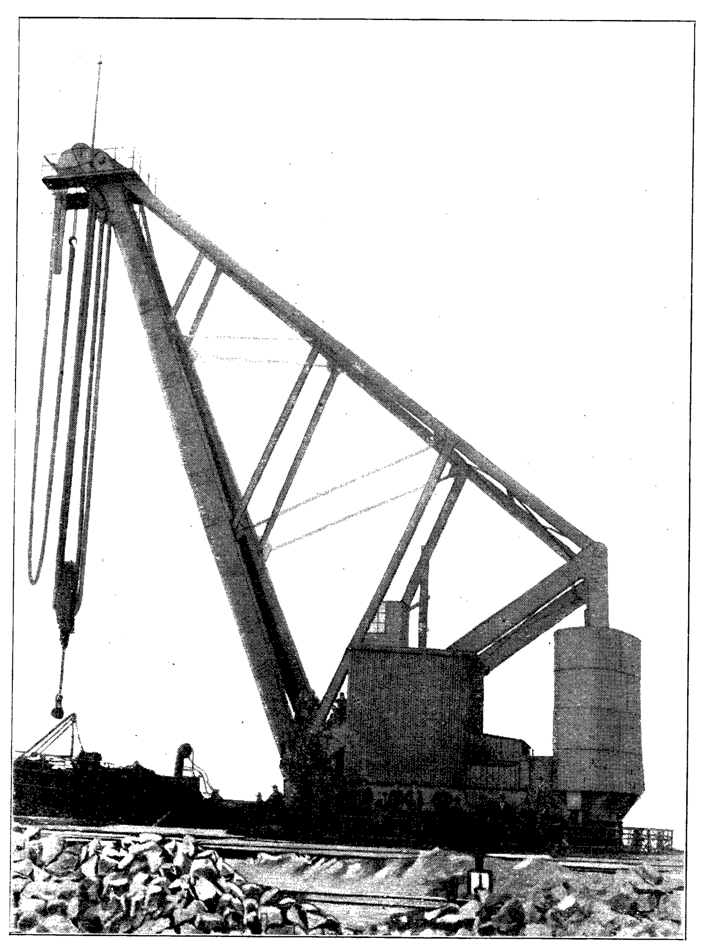
Wir knüpfen an die Betrachtung des theoretischen Teils der graphischen Statik (p. 40ff.) an. Er findet seine Fortsetzung in umfassenden praktischen Anwendungen auf die Fachwerkstheorie.[2]) Indem wir uns sogleich auf einen speziellen Fall der Fachwerke, die Dreiecksfachwerke, beschränken, wollen wir folgende Definition voranstellen:

Unter einem *Dreiecksfachwerk* verstehen wir die einem (meist aus Eisen konstruierten) Bauwerk zugrunde liegende ebene geometrische Figur, welche so aus Dreiecken kettenartig zusammengesetzt ist, daß jedes Dreieck mit dem folgenden und dem vorhergehenden nur je eine Seite gemeinsam hat. Die Seiten bezeichnen wir als

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 51, 1904, p. 1—29, im Separatabdruck zugleich mit den Modellen erschienen im Verlage von Martin Schilling, Halle a. S. 1904. Von der dort genannten Literatur möchte ich hier anführen:
C. Bach, Maschinenelemente, Stuttgart 1901, p. 220—308;
F. Reuleaux, Theoretische Kinematik, Bd. II, Braunschweig 1900, p. 457—473, sowie Der Konstrukteur, Braunschweig 1882—89, p. 514—599;
L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, p. 173—229;
F. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, 3 Bde., Leipzig 1875—1890, Bd. II p. 277—290.

2) Vgl. auch F. Klein, Über technische Mechanik, in dem früheren Sammelbande, Leipzig 1900, p. 32—34.

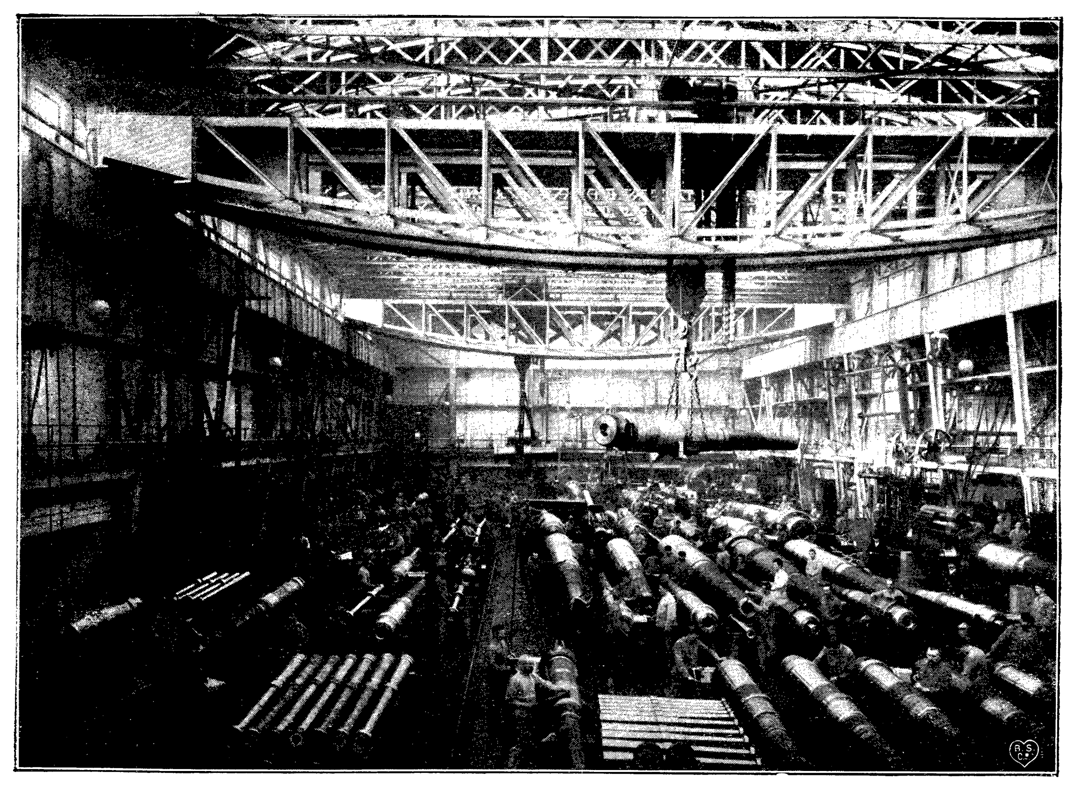
Stäbe und denken sie in Annäherung an die wirklichen Verhältnisse in ihren Endpunkten, den Knotenpunkten, gelenkig miteinander verbunden. Praktisch ausgeführte Beispiele gerade auch dieser einfacheren Fachwerksart begegnen uns im Leben überaus häufig, besonders als Brücken-, Dachkonstruktionen



Figur 64. Dampfkran in Hamburg, 150000 kg Tragfähigkeit.

und Krane. (Beispiele: Fig. 64 und 65.) Von den bedeutendsten Fachwerken sind ja besonders der Eiffelturm (Beispiel eines räumlichen Fachwerks) und in unserm Vaterland die Müngstener Brücke allgemein bekannt. Das Dreiecksfachwerk ist nun mit zwei Knotenpunkten A und B auf festem Grunde aufgelagert zu denken, von denen einer (A) fest, der andre (B) derart als

beweglich anzusehen ist, daß er sich nur längs einer, meist horizontalen Geraden verschieben kann, wie es die Figur 66a für einen aus zwei Dreiecken bestehenden Kran andeutet. Auf die einzelnen Knotenpunkte des Fachwerks sind die zu tragenden Lasten verteilt, bei einer Brücke beispielsweise das Gewicht eines Eisenbahnzuges oder einer sonstigen Verkehrs-

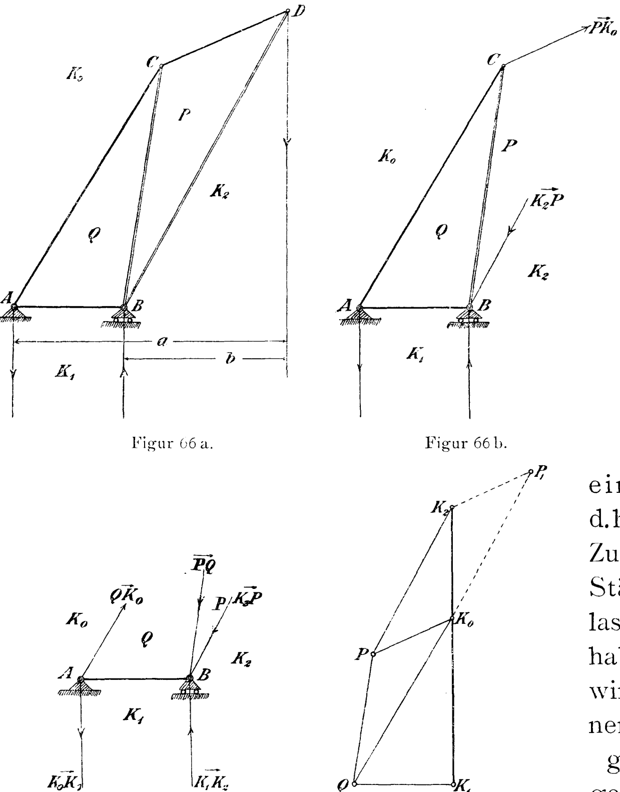


Figur 65. Laufkran in der Kanonenwerkstatt von Friedrich Krupp in Essen, 75000 kg Tragfähigkeit.

last, bei einer Dachkonstruktion das Gewicht der Dachdeckung, der aufliegenden Schneemasse und der Winddruck[1]), bei einem Kran vor allem das im äußersten Knotenpunkt angreifende

1) Man pflegt folgende Konstanten hierfür in der Praxis anzunehmen: Gewicht einer einfachen Ziegeldeckung 102 kg pro qm Dachfläche, der Schneelast 75 kg pro qm der Horizontalprojektion des Daches; für den Winddruck gilt: $W = 120 \sin^2 (v + 10^0)$ kg pro qm Dachfläche, wo v die Neigung der Dachfläche gegen die Horizontalebene ist und 10^0 erfahrungsgemäß als der Winkel der Richtung des Windes gegen die Horizontalebene gewählt ist. Vgl. H. F. B. MÜLLER-BRESLAU, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. I, 3. Aufl., Leipzig 1901, Anhang p. 427 ff.

Gewicht des zu hebenden Körpers. So möge z. B. beim Fachwerk der Figur 66a im Punkte D die durch $\overrightarrow{K_2 K_0}$ in Figur 66d dargestellte Last angreifen. Zwei Aufgaben sind dann unter der Annahme einer bestimmten Belastung in Rücksicht darauf zu lösen, daß das ganze System im Gleichgewicht ist: Erstens sind die „Auflagerreaktionen" zu bestimmen, d. h. diejenigen beiden Kräfte in den Auflagerpunkten A und B, welche die Reaktion des festen Bodens darstellen, zweitens die Spannungen in den einzelnen Stäben, d. h. die Druck- bezw. Zugkräfte, welche die Stäbe bei der Belastung auszuhalten haben. In jedem Stab wirken eben von seinen Endpunkten ausgehend zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die ihn zusammenzudrücken bezw. auszudehnen suchen.



Figur 66 a. Figur 66 b. Figur 66 c. Figur 66 d.

In betreff der ersten Aufgabe wissen wir, daß die Auflagerkraft im beweglichen Auflager B des Fachwerks in der Richtung der Normalen seiner Geraden, d. h. in unserm Beispiel vertikal, wirkt. Man wird im allgemeinen Falle eines beliebigen Dreiecksfachwerkes am einfachsten die gegebenen Kräfte mit Hilfe des Seilpolygons, wie auf p. 42 näher gezeigt wurde, zu der Resultierenden zusammensetzen. Die Verbindungslinie AT des Auflagers A und des Schnittpunktes T der Angriffslinie der Resultanten mit der Normalen des Auflagers B

gibt die Angriffslinie der in A wirkenden Reaktion an. Die gefundene Resultante ist daher einfach nach dem Parallelogramm der Kräfte (oder dem Archimedischen Hebelgesetz) in zwei Komponenten zu zerlegen, deren Angriffslinien die beiden Geraden AT und BT sind; die gesuchten Auflagerkräfte sind diesen Komponenten entgegengesetzt gleich. Die im Gleichgewichtszustand befindliche Gesamtheit der gegebenen Kräfte und dieser beiden Auflagerkräfte pflegt man als äußere Kräfte im Gegensatz zu den inneren Kräften, den Spannungen, zu bezeichnen. In dem einfachen Beispiel der Figur 66a, wo nur die eine vertikal nach unten gerichtete Kraft $\overrightarrow{K_2 K_0}$ im Knotenpunkt D angreift, sind die Auflagerkräfte ($\overrightarrow{K_0 K_1}$ und $\overrightarrow{K_1 K_2}$) in den Punkten A und B auch vertikal gerichtet und ergeben sich hier nach dem Archimedischen Hebelgesetz, indem man $\overrightarrow{K_2 K_0}$ (äußerlich) so teilt, daß sich die Teilstrecken $\overrightarrow{K_0 K_1}$ und $\overrightarrow{K_1 K_2}$ umgekehrt verhalten wie die Abstände a und b der vertikalen Angriffslinien in A und B von der Angriffslinie in D. Die Ausführung dieses Teils der Aufgabe geschieht vielleicht wieder am besten mit Hilfe eines Seilpolygons (vgl. Aufgabe 3 p. 44); es treten auch hier wie früher zwei Figuren 66a und 66d, die des Fachwerks und die des Kräfteplanes, einander zweckmäßig gegenüber.

Die Lösung der zweiten Aufgabe, die Konstruktion der Spannungen, wollen wir an unserm Beispiel auseinanderzusetzen uns begnügen. Wir bezeichnen nach dem Vorgange des Engländers R. H. Bow in der Figur des Fachwerks die einzelnen Dreiecke mit den Buchstaben P, Q und die übrigen Felder der Ebene so mit den Buchstaben K_0, K_1, K_2, daß zur Seite jeder Angriffslinie gerade die beiden Buchstaben stehen, welche in der Figur 66d die zugehörige äußere Kraft angeben. Dem letzteren entsprechend bemerken wir schon vorab, daß wir die Spannungen in einer einzigen Figur, dem „Kräfteplan“, so konstruieren wollen, daß die Buchstaben der beiden Felder, die zu den Seiten jedes Stabes der Figur 66a liegen, in jener zweiten (Fig. 66d) die zugehörigen Spannungen angeben. Es ist leicht zu übersehen, daß man zunächst die im Punkte D angreifende Kraft $\overrightarrow{K_2 K_0}$ in zwei Komponenten längs den Richtungen DB und DC zerlegen muß. Man führt dies am besten aus, indem man in Figur 66d durch K_2 die Parallele zu DB und durch K_0

die Parallele zu DC zieht. Ist P der Schnittpunkt beider Parallelen, so sind $\overrightarrow{K_2P}$ und $\overrightarrow{PK_0}$ nach Größe und Richtung die gesuchten Komponenten, — von dem durch gestrichelte Linien K_2P_1 und P_1K_0 vervollständigten Parallelogramm der Kräfte $K_2PK_0P_1$ ist also wieder nur die Hälfte zu zeichnen ausreichend. Das Parallelogramm können wir ja so in die Figur 66a verlegt denken, daß K_2P, K_2P_1 und K_2K_0 bezw. mit DB, der Verlängerung von DC und der Angriffslinie der in D wirkenden äußeren Kraft zusammenfallen. Diese Kräfte $\overrightarrow{K_2P}$ und $\overrightarrow{PK_0}$ geben daher zugleich die Spannungen in den Stäben BD und CD des Fachwerks an, und zwar erleidet BD eine Druck-, CD eine Zugspannung, da die Kraft $\overrightarrow{K_2P}$ ersteren zusammenzudrücken, $\overrightarrow{PK_0}$ letzteren Stab auszudehnen sucht. Beide Kräfte werden natürlich durch die von den Knotenpunkten B und C herkommenden, in entgegengesetzter Richtung wirkenden inneren Kräfte aufgehoben. Wir denken nun weiter in der Figur 66a den Knotenpunkt D mit seiner äußeren Kraft und den Stäben DC und DB fortgelassen, dafür aber in B und C die beiden Kräfte $\overrightarrow{K_2P}$ und $\overrightarrow{PK_0}$ nach Größe und Richtung angebracht (Fig. 66b). Dann können wir die in C angreifende Kraft $\overrightarrow{PK_0}$ wieder in analoger Weise wie soeben in zwei Komponenten zerlegen längs AC und CB dadurch, daß wir in Figur 66d die Parallelen zu CA durch K_0 und zu CB durch P in Q zum Schnitt bringen. $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QK_0}$ sind alsdann wieder nach Größe und Richtung die gesuchten Komponenten. Sie zeigen zugleich durch ihre Richtungen, daß in CB Druck, in CA Zug herrscht. Endlich denken wir auch den Punkt C mit der an ihm angreifenden Kraft $\overrightarrow{PK_0}$ und den Stäben CA und CB fortgenommen und fügen statt dessen die diese Kraft $\overrightarrow{PK_0}$ ersetzenden Komponenten $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QK_0}$ in den Punkten A, B angreifend hinzu (Fig. 66c). Außer der Komponente $\overrightarrow{QK_0}$ wirkt auf A noch die äußere Kraft $\overrightarrow{K_0K_1}$; beide setzen sich, wie man aus Figur 66d ersieht, zu der durch $\overrightarrow{QK_1}$ nach Größe und Richtung gegebenen Resultierenden zusammen. Auf den Punkt B andrerseits wirken die noch übrigen Kräfte $\overrightarrow{K_1K_2}$, $\overrightarrow{K_2P}$ und $\overrightarrow{PQ}$, welche nach Figur 66d sich zu der durch K_1Q nach Größe und Richtung gegebenen Resultanten zusammen-

setzen. Die beiden in A und B angreifenden Kräfte $\overrightarrow{QK_1}$ und $\overrightarrow{K_1Q}$ müssen sich nun wieder das Gleichgewicht halten, ebenso wie die ursprüngliche Gesamtheit aller äußeren Kräfte im Gleichgewicht war. Es kommt dann der einfache Satz zur Anwendung:

Zwei Einzelkräfte, die in den Punkten A und B angreifen, können nur dann im Gleichgewicht sein, wenn sie entgegengesetzt gleich sind und in der Verbindungslinie AB wirken.

Aus ihm folgt:

In Figur 66d ist auch die Verbindungslinie QK_1 zu AB parallel; $\overrightarrow{QK_1}$ und $\overrightarrow{K_1Q}$ stellen daher nach Größe und Richtung die von den Punkten A und B ausgehenden Kräfte der im Stabe AB herrschenden Druckspannung dar.[1]) Hiermit ist zugleich der Beweis für die Richtigkeit unserer Konstruktion erbracht. Hervorheben will ich noch einmal, daß sie im wesentlichen nur auf der Anwendung des Parallelogramms der Kräfte

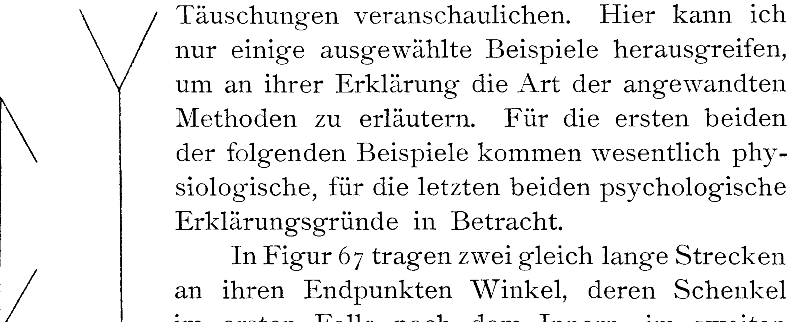
1) Die Spannungen haben den Bedingungen zu genügen, daß die auf jeden Knotenpunkt wirkenden, von allen benachbarten Knotenpunkten ausgehenden inneren Kräfte und die etwa auf ihn wirkenden äußeren Kräfte im Gleichgewicht sind. Diese Bedingungen geben den Ansatz zur analytischen Behandlung unsrer Aufgabe. Daß sie durch unsere geometrische Konstruktion erfüllt sind, folgt unmittelbar daraus, daß die auf jeden Knotenpunkt wirkenden Kräfte ein geschlossenes Polygon in der Figur 66d bilden, z. B. die auf B wirkenden Kräfte das Polygon $K_1K_2PQK_1$. Man kann dann dies Polygon in Vervollständigung unsrer Zeichnung wieder mit den Buchstaben des entsprechenden Knotenpunktes der Figur 66a bezeichnen, wodurch die mit der Theorie des Nullsystems in Zusammenhang stehende Reziprozität beider Figuren weiter angedeutet wird. Vgl. das auf p. 48 genannte Referat von L. Henneberg Nr. 12, p. 362ff. und Nr. 33, p. 397ff. — Die vorgetragenen Methoden der Spannungsbestimmung sind jedoch nur als eine Annäherung an die wirklichen Verhältnisse zu betrachten. Die moderne strengere Theorie berücksichtigt sog. „Nebenspannungen“ und bei statisch unbestimmten Fachwerken „Eigenspannungen“. Auf diese statisch unbestimmten Fachwerke wie die Fachwerke im Raum (vgl. A. Föppl, Das Fachwerk im Raum, Leipzig 1892, und ferner: Graphische Statik p. 266—318) sei hier auch nur hingewiesen. Vgl. auch das aus persönlichem Verkehr seines Verfassers mit C. Culmann hervorgegangene Werk J. Wolff, Das Gesetz der Transformation der Knochen, Berlin 1892, wo ausführlich die Beziehung der Fachwerkstheorie zum Aufbau der menschlichen Knochen, vor allem des Oberschenkelknochens behandelt wird, die jedoch nach neueren Untersuchungen nicht begründet sein soll; die zahlreichen Arbeiten hierüber sind in dem Anhang des Referates O. Fischer, Physiologische Mechanik, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, IV, 9 (Leipzig 1904) zusammengestellt.

beruht. Als Literatur habe ich hier im übrigen dieselben Werke zu nennen, die bereits p. 47f. zusammengestellt sind.

Es ist als ganz besonders erfreulich zu begrüßen, daß die Fachwerkstheorie bereits in einer für höhere Schulen bestimmten Aufgabensammlung eine ausführlichere Behandlung unter Anschluß zahlreicher Aufgaben erfahren hat, nämlich bei A. Schülke, Aufgabensammlung etc. (cf. p. 4) p. 170—181. Daß es aber sogar möglich ist, auch den doch sehr wünschenswerten Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion, den Hr. Schülke nicht bringt, in einer den Schülern verständlichen Weise zu führen, gerade um dies zu zeigen, bin ich ausführlicher auf die Fachwerkstheorie eingegangen.

XII. Physiologie und Psychologie.

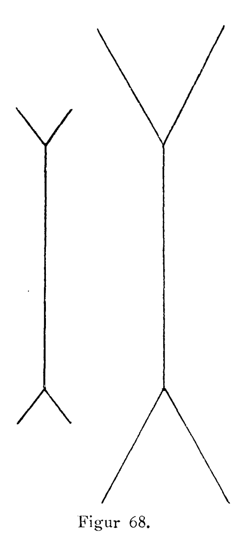
Gewiß wird mancher von Ihnen sich schon verwundert gefragt haben, was denn diese Disziplinen mit der darstellenden Geometrie zu tun haben. Doch jedem, der einmal Aufgaben der darstellenden Geometrie wirklich gezeichnet hat, wird aufgefallen sein, daß oft gerade Linien, die parallel, oder Strecken, die gleich sein sollten, trotz aller angewandten Sorgfalt es nicht zu sein schienen: es sind geometrisch-optische Täuschungen, die hier zumeist ihr Spiel treiben. Solche Täuschungen wissenschaftlich zu studieren, vor allem nach einem Erklärungsgrund für sie zu forschen, das umfaßt das hier zunächst zu erwähnende Gebiet der Physiologie und Psychologie. Sie haben schon bei der Besichtigung meines Instituts eine große Zahl solcher Tafeln gesehen, die geometrisch-optische Täuschungen veranschaulichen. Hier kann ich nur einige ausgewählte Beispiele herausgreifen, um an ihrer Erklärung die Art der angewandten Methoden zu erläutern. Für die ersten beiden der folgenden Beispiele kommen wesentlich physiologische, für die letzten beiden psychologische Erklärungsgründe in Betracht.



Figur 67.

In Figur 67 tragen zwei gleich lange Strecken an ihren Endpunkten Winkel, deren Schenkel im ersten Falle nach dem Innern, im zweiten nach dem Äußern der Strecke gewandt sind. Die erste Strecke erscheint kleiner als die zweite. Diese Täuschung wurde zuerst

von F. C. Müller-Lyer 1887 entdeckt und in dem Dubois-Reymondschen Archiv für Physiologie (Suppl. p. 263 ff., Taf. IX) beschrieben. Sie ist in neuerer Zeit vielfach Gegenstand experimenteller und theoretischer Untersuchungen gewesen, es existiert daher für sie bereits eine ansehnliche Literatur und eine Reihe von Erklärungsversuchen. Nur die vom Entdecker Müller-Lyer aufgestellte Erklärung möchte ich hier anführen, um ihr dann die des bekannten Leipziger Physiologen und Philosophen W. Wundt gegenüberzustellen. Jener sagte, daß man bei der Abschätzung der Strecke insbesondere auch die zu beiden Seiten derselben mehr oder minder deutlich abgegrenzten Flächenstücke mit in Anschlag bringe. Die erste Strecke werde also deswegen für kleiner gehalten, weil ihr zur Seite auch kleinere Flächenstücke liegen. Doch wird die Unhaltbarkeit dieser Erklärung durch eine zweite Figur klar bewiesen, auf die man bei Variation der Versuche gestoßen ist (Fig. 68). Wieder sehen wir zwei gleich lange Strecken, die jetzt beidemal an den Endpunkten Winkel mit auswärts gekehrten Schenkeln tragen, doch sind letztere im einen Falle sehr kurz, im andern sehr lang. Jetzt zeigt sich, daß die Strecke mit den kurzen Schenkeln größer erscheint als die andere; dies steht aber im Widerspruch mit der Erklärung von Müller-Lyer. Jedenfalls ergibt sich aber als positives Resultat der sehr interessante Satz:



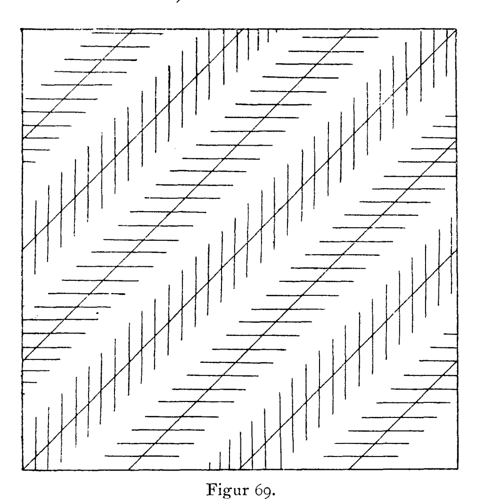
Figur 68.

Bei zunehmender Verlängerung der auswärts gekehrten Schenkel wird die Strecke zunächst scheinbar immer mehr vergrößert, bis diese Täuschung ein Maximum erreicht und dann wieder abnimmt.

Wundt sieht im Gegensatz zu der Müller-Lyerschen Erklärung die primäre Ursache dieser Täuschung in der Art der Bewegung des Auges. Bei der Figur mit einwärts gekehrten Schenkeln bilden diese bei Durchlaufung der Strecke mit dem Blick eine Hemmung, sodaß der Blick über die Endpunkte der Strecke nicht hinausgleitet, bei der Figur mit auswärts gerichteten, doch sehr kurzen Schenkeln geben diese im Gegenteil dem Blicke einen Anlaß zum leichten Fortgleiten über die

Endpunkte hinaus. Da die Schenkel sehr kurz sind, macht das Auge indes nicht bei den Knotenpunkten Halt, sondern faßt die Figur gleichsam als ein Ganzes auf. Bei der Figur mit auswärts gewandten und sehr langen Schenkeln hingegen wird die Figur als aus drei deutlich voneinander getrennten Teilen bestehend aufgefaßt. Läßt man den Blick über sie gleiten, so hält er an den Knotenpunkten inne, eben weil der Richtungsunterschied der Ansatzstücke und der Strecke selbst sich zu deutlich bemerkbar macht. Es findet also bei dieser letzten Figur ebenso eine Hemmung der Blickbewegung statt wie bei der allerersten. Dies ist nun insofern von Einfluß auf die Größenschätzung der Strecke, als die angeführte Art der Blickbewegung in den einzelnen Fällen einen verschieden großen Teil der gesamten Muskelanstrengung des Auges auf Rechnung der mittleren Strecke setzt. Diese verschieden großen Muskelanstrengungen erzeugen in uns verschieden große Empfindungen, die dann ihrerseits eine verschieden große Schätzung der Strecke selbst auslösen.

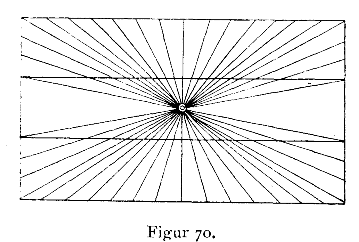
Als zweites Beispiel erwähne ich das sogenannte Zöllnersche Muster, das der bekannte Leipziger Astronom und Physiker einem zufällig beobachteten Tapetenmuster nachgebildet hat (Fig. 69). Die schräg verlaufenden, in Wirklichkeit parallelen Linien konvergieren scheinbar nach der Seite, wo die sie schneidenden Strecken an der Innenseite des einzelnen Parallelstreifens mit der Fortsetzung der Geraden stumpfe Winkel, sie divergieren, wo diese Strecken entsprechend spitze Winkel bilden. In analoger Weise scheinen in den durch Fig. 70 und 71 gegebenen Zeichnungen zwei Parallellinien nach außen zu konvergieren bezw. zu divergieren.[1])



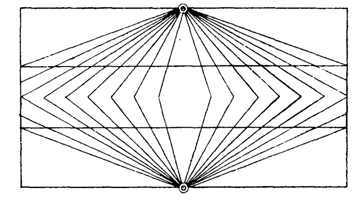
Figur 69.

1) Für den Schüler dürfte es schon eine empfehlenswerte Aufgabe sein, die in den Figuren sich darbietenden geometrisch-optischen Täuschungen ihrem Wesen

Betreffs der Erklärung dieser Täuschung will ich nur andeuten, daß nach WUNDT sehr spitze Winkel, wie sie unsere Figuren zahlreich enthalten, in ihrer Größe überschätzt, größere Winkel



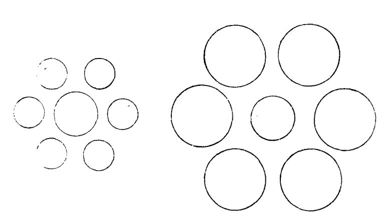
Figur 70.



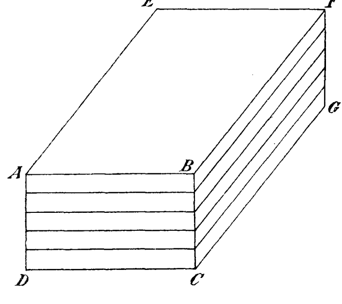
Figur 71.

im Vergleich zu ihnen unterschätzt werden, daß diese Tatsache aber wieder in physiologischen Gründen ihre Erklärung findet.

In Figur 72 endlich sehen wir zwei gleich große Kreisflächen von je sechs kleineren bezw. größeren Kreisflächen umgeben. Die von den kleineren Kreisen umgebene Kreisfläche erscheint größer als die andere. Sie alle werden hier sofort Wirkungen des Kontrastes erkennen, wie solche auch bei einer großen Menge analoger Erscheinungen im Gebiete der anderen Sinnes-



Figur 72.



Figur 73.

wahrnehmungen sich darbieten.[1]) Figur 73 schließlich stellt ein rechtwinkeliges Parallelepiped (Mauerwerk) in Kavalierperspektive gezeichnet dar. Die von dem vorderen Rechteck auslaufenden Geraden AE, BF und CG scheinen nicht parallel zu sein, sondern nach hinten zu divergieren. Die Ursache

nach zu beschreiben und in bestimmten Sätzen ähnlich wie im Text zum Ausdruck zu bringen.

1) Prüft man z. B. dasselbe Wasser auf seine Temperatur, nachdem man vorher das eine Mal mit kälterem, das andere Mal mit wärmerem Wasser in Berührung war, so wird das zu prüfende das erste Mal wärmer als das zweite Mal geschätzt werden.

ist auch hier psychologischer Natur; wir sind eben gewohnt, solche Körper, wie sie in der Natur und im Leben vorkommen, zumeist in perspektivischen Zeichnungen zu sehen, bei denen die zur Bildebene senkrechten Geraden wirklich konvergierend dargestellt sind. Der Gegensatz zu diesen Erinnerungsbildern verursacht daher hier die Täuschung.

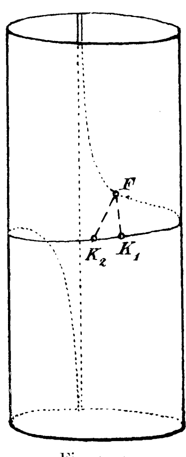
Überaus zahlreich ist die Literatur über die geometrisch-optischen Täuschungen, die zumeist in den Zeitschriften für Physiologie und Psychologie sich findet. Zu weiterem Studium möchte ich Ihnen besonders die zusammenfassenden Darstellungen empfehlen:

H. von Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, 2. Aufl., Hamburg und Leipzig 1896, p. 770 ff.;

W. Wundt, Die geometrisch-optischen Täuschungen, Nr. 2 des XXIV. Bandes der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächs. Ges. der Wiss., Leipzig 1898;

P. Plettenberg, Geometrisch-optische Täuschungen, dargestellt in ihren Erklärungsversuchen, 2 Programme, Magdeburg 1902 und 1903.[1])

Eine andere Frage der Physiologie, die in die darstellende, speziell in die projektive Geometrie des Raumes hineingreift, geht auch auf H. von Helmholtz zurück (l. c. § 27 und 31), ich meine die Theorie des Horopters. Blickt man mit beiden Augen K_1, K_2 (Fig. 74) nach einem Raumpunkt F, so vereinigen sich die auf den beiden Netzhäuten entworfenen Bilder des Punktes zu einer einzigen Empfindung; man sieht den Punkt einfach. Von den übrigen Punkten des Raumes werden bei dieser bestimmten Augenstellung nur gewisse einfach gesehen, die anderen aber doppelt, eine Tatsache, deren wir uns allerdings für gewöhnlich nicht bewußt sind. Den Ort der bei einer bestimmten Augenstellung einfach gesehenen Raumpunkte nennt man den zu dieser Augenstellung



Figur 74.

1) Die auf experimenteller Grundlage sich aufbauenden Untersuchungen des Hrn. L. Burmester (Diss. München 1896) erwecken wegen der zu bestimmten Formeln führenden Resultate besonders das Interesse des Mathematikers. — Die bekannte Täuschung über die Größe des Mondes behandelt u. a. W. von Zehender, Über optische Täuschung mit besonderer Berücksichtigung der Täuschung

gehörenden Horopter. Unter Annahme bestimmter von H. von Helmholtz aufgestellter, von anderer Seite neuerdings bestrittener Hypothesen wird er als Schnitt entsprechender Strahlen zweier kongruenter Strahlenbündel durch eine bestimmte Raumkurve dritter Ordnung dargestellt (Fig. 74). Nähere Ausführungen findet man mit Angabe weiterer Literatur am besten in der Schrift:

W. Ludwig, Die Horopterkurve mit einer Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve, Halle a. S., Verlag von Martin Schilling, 1902.

Die Arbeit beschreibt auch das im gleichen Verlage erschienene Modell des Horopters.

XIII. Kunst (Malerei und Bildhauerkunst).

Die Bedeutung der malerischen Perspektive für die Maler und Architekten ist Ihnen allen bekannt. Ich kann mich daher damit begnügen, mit wenigen Worten von ihr zu sprechen, zumal ich mir vorbehalte, bei der Behandlung der Photogrammetrie noch ausführlicher auf die Beziehungen der Malerei und Architektur zur Perspektive einzugehen. Besonders pflegt man ja als Beispiele beim Unterricht in der Perspektive architektonische Gebilde zu wählen, sodaß die im Abschnitt IX (p. 73) genannten Vorlagen und Modelle auch hier zu zweckmäßiger Verwendung gelangen. Je nachdem die Bildebene parallel zu einer Hauptebene des Gebäudes gewählt wird oder nicht, spricht man von einer Front- oder Übereckstellung, von welchen Begriffen wir morgen (p. 102 f.) weiteren Gebrauch machen werden. Eigenartig ist es ja, daß die Perspektive den Schülern mehr Schwierigkeiten bereitet als die anderen Methoden der darstellenden Geometrie, während doch unser Auge uns immer Beispiele für jene liefert. Ich möchte daher empfehlen, Photographieen geeigneter Objekte zur praktischen Veranschaulichung der geometrischen Sätze der Perspektive beim Unterricht zu benutzen, wie z. B. die Figuren 75 und 76 den Fluchtpunkt der zur Bildebene senkrechten Geraden deutlich zur Anschauung bringen. Auf die mannigfachen Regeln

über die Form des Himmelsgewölbes und über die Größenverhältnisse der Gestirne, Leipzig 1902, Abdruck aus der Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, Bd. XX u. XXIV.



zur Konstruktion perspektivischer Bilder mitsamt dem Schatten der Objekte, insbesondere auf die Anwendung der ebenen Zentralkollineation hier einzugehen, würde indes zu weit führen.

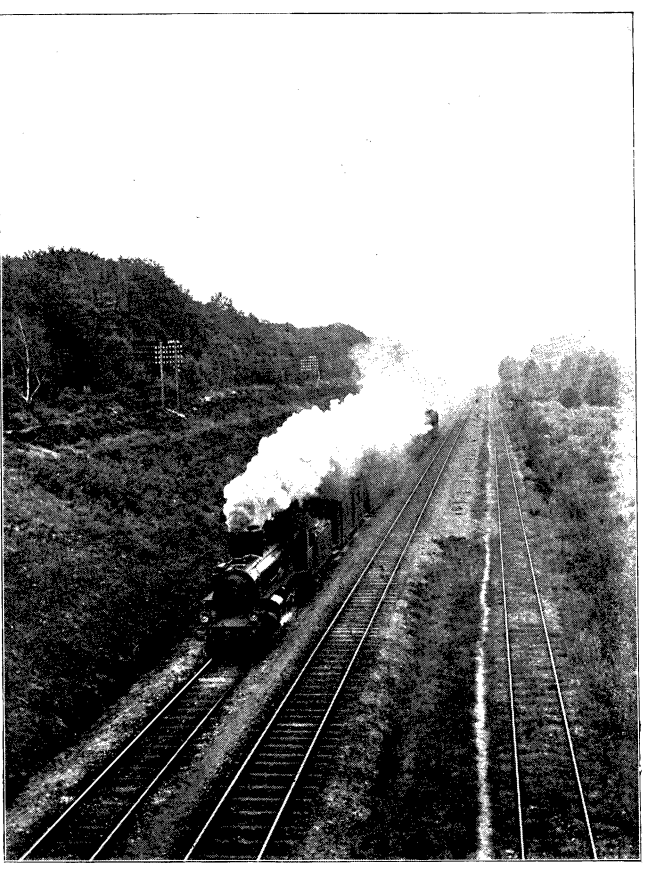


Fig. 75. Bahneinschnitt im Stadtwalde von Frankfurt a. M.

Außer den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie selbst (p. 8) möchte ich noch folgende kleinen Werke[1]) empfehlen,

1) Größere Werke der Perspektive sind:

J. J. PILLET, Traité de perspective linéaire, 3. Aufl., Paris 1901;

J. DE LA GOURNERIE, Traité de perspective linéaire, 3. Aufl., Paris 1898;

G. NIEMANN, Handbuch der Linearperspektive für bildende Künstler, 2. Aufl., Stuttgart 1902.

Für die Aushängung in den Zeichensälen als Vorlagen eignen sich:

A. M. FRANGENHEIM, Praktische Anwendungen der Linearperspektive, ein neues perspektivisches Studienblatt, Berlin 1895;

A. BRIX, Perspektivisches Studienblatt, Berlin 1891.

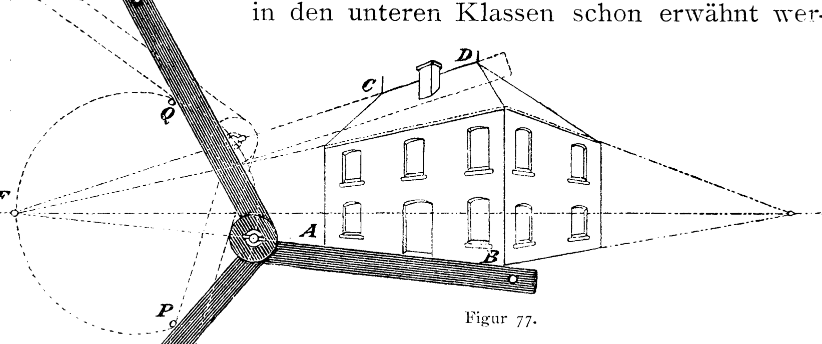
Figur 76. Promenadendeck auf dem Schnelldampfer des Norddeutschen Lloyd „Kaiser Wilhelm der Große“.

die gute Anregung zu mannigfachen praktischen Beispielen bieten:

M. Kleiber, Angewandte Perspektive (Webers Sammlung illustrierter Katechismen Nr. 137), Leipzig, 2. Aufl., 1896;

H. FREYBERGER, Perspektive (Sammlung Göschen Nr. 57), Leipzig 1899.

Doch auf einen hier vorliegenden Apparat, die sogenannte Fluchtpunktschiene[1]), will ich Ihre Aufmerksamkeit noch lenken. Sie gestattet, nach einem Fluchtpunkt F, der, wie es häufig vorkommt, außerhalb des Zeichenblattes liegt, beliebige Verbindungsstrahlen zu ziehen. Ihre Theorie beruht auf dem Satze von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen, sodaß der leicht verständliche Apparat als praktische Anwendung dieses Satzes in den unteren Klassen schon erwähnt wer-



Figur 77.

den kann (Fig. 77). Für seinen Gebrauch, insbesondere was seine Einstellung auf den Schnittpunkt zweier außerhalb des Zeichenblattes konvergierender Geraden AB und CD betrifft, finden Sie ein einfaches Verfahren zugleich mit Angabe weiterer Literatur in dem Aufsatze angegeben:

R. MEHMKE, Über das Einstellen der dreiteiligen Fluchtpunktschiene, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XLII p. 99—103, Leipzig 1897.

Ferner möchte ich die Anwendung der Reliefperspektive in der Bildhauerkunst erwähnen. Das erste bedeutende Beispiel dieser Kunst bilden die berühmten Türen am Hauptportal des Baptisteriums in Florenz von LORENZO GHIBERTI, deren 1424—47 im Erzguß vollendeten Reliefskulpturen um so bewundernswerter die Regeln der Reliefperspektive beachten, als zu der damaligen Zeit selbst die malerische Perspektive noch in den ersten Anfängen ihrer Entwicklung stand (Fig. 78 a, b).

1) Die Fluchtpunktschiene ist zu beziehen von der Firma J. Schröder, Polytechn. Arbeitsinstitut, Darmstadt.

Dieses Kunstwerk wurde von Michelangelo für würdig erachtet, die Pforten des Paradieses zu zieren. Von späteren Werken nenne ich die Marmorreliefs an dem Grabdenkmal Maximilians I. in der Hofkirche zu Innsbruck, die von Alexander Colin (1526—1612) ausgeführt wurden. Außer den Ab-



Fig. 78a. Ghiberti, Relief am Hauptportal des Baptisteriums zu Florenz.

schnitten in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, besonders bei Chr. Wiener und K. Rohn und E. Papperitz, kann ich als spezielle Schrift nennen:

L. Burmester, Grundzüge der Reliefperspektive nebst Anwendung zur Herstellung reliefperspektivischer Modelle, Leipzig 1883.

Beispiele reliefperspektivischer Zeichnungen von architektonischen Gebilden zeigen Ihnen die hier vorliegenden

Zeichnungen, bei denen die Modelle von Hrn. G. Hauck benutzt wurden (Beispiel: Fig. 79).[1])

Ein Zwischenglied zwischen der malerischen und der Reliefperspektive bildet neben der Panoramen- und Dioramen-



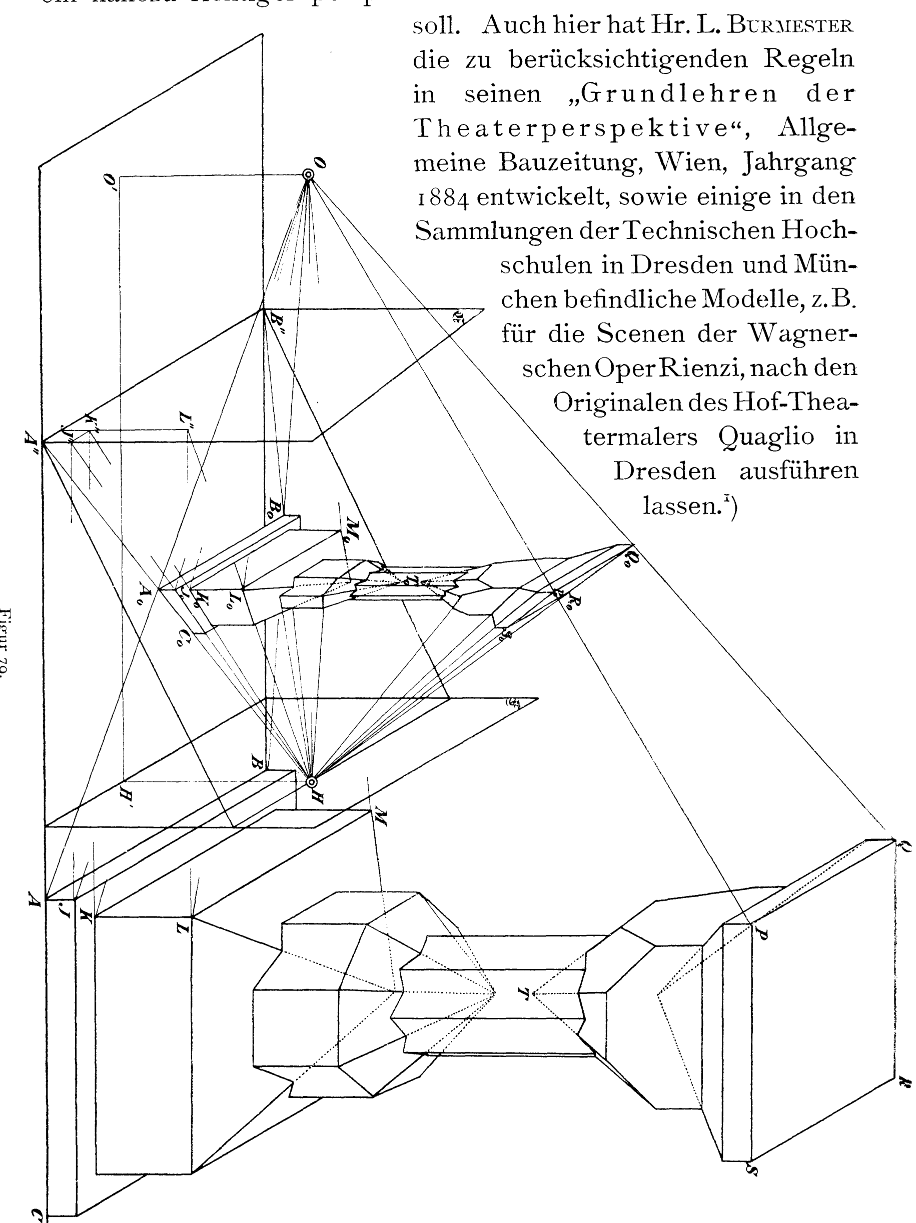
Figur 78b. Ghiberti, Relief am Hauptportal des Baptisteriums zu Florenz.

perspektive besonders die Theaterperspektive, als deren Anfang die von den Alten ausgebildete Scenographie anzusehen ist.[2]) Hier kommt wesentlich in Betracht, daß nicht ein einzelner

1) Näheres über die Literatur und die geschichtliche Entwicklung der Reliefperspektive siehe bei Chr. Wiener, l. c. Bd. I p. 47—51.

2) Vgl. Vitruvs „Baukunst“, I. Buch 2. Kap. und VII. Buch, Guido Ubaldi, Perspettiva, Pisauri 1600, J. H. Lambert, l. c. Bd. II p. 142—152, sowie Chr. Wiener, l. c. Bd. I p. 50.

Augenpunkt zu berücksichtigen ist, sondern daß von allen Seiten ein nahezu richtiger perspektivischer Eindruck erweckt werden soll. Auch hier hat Hr. L. Burmester die zu berücksichtigenden Regeln in seinen „Grundlehren der Theaterperspektive", Allgemeine Bauzeitung, Wien, Jahrgang 1884 entwickelt, sowie einige in den Sammlungen der Technischen Hochschulen in Dresden und München befindliche Modelle, z.B. für die Scenen der Wagnerschen Oper Rienzi, nach den Originalen des Hof-Theatermalers Quaglio in Dresden ausführen lassen.[1])



Figur 79.

1) Besonders hat auch J. de la Gournerie in seinem Traité de perspective linéaire, 3. Aufl., Paris 1898, die Theaterperspektive behandelt.

Morgen möchte ich nun von der Photogrammetrie ausführlicher berichten. Doch haben Sie aus meinen bisherigen Ausführungen gewiß schon die Überzeugung gewonnen, daß es in der Tat eine unendliche Fülle von Anwendungen der darstellenden Geometrie in den verschiedensten theoretischen und praktischen Gebieten gibt. Ein reiches Feld der Mitarbeit breitet sich hier vor Ihnen aus; gilt es doch, die einzelnen Anwendungen für den Unterricht an den höheren Schulen nun auch zweckmäßig und der Fassungskraft des Schülers angepaßt auszugestalten. Freilich wird man nur dann Zeit finden, diese Anwendungen der darstellenden Geometrie in geeigneter Auswahl genügend berücksichtigen zu können, wenn andere abstrakte Gebiete aus dem Unterricht fortbleiben, wie die Zeichnung der beliebten geometrischen Stilleben und ihrer Schatten, der komplizierten regulären Körper u. dgl. Gewiß kann die lebendige Beziehung des Unterrichtes im Linearzeichnen zu den Verhältnissen des uns umgebenden Lebens, zumal sie in nicht geringerem Grade sich zur logischen Schulung des jugendlichen Geistes geeignet erweist als die theoretischen Aufgaben, wesentlich dazu beitragen, das Interesse des Schülers für die darstellende Geometrie lebhaft und dauernd zu wecken und auch über die Schulzeit hinaus zu fesseln, was besonders für solche Schulen Beachtung verdient, wo das Linearzeichnen nur fakultativer Unterrichtsgegenstand ist.

Dritte Vorlesung.

XIV. Photogrammetrie.

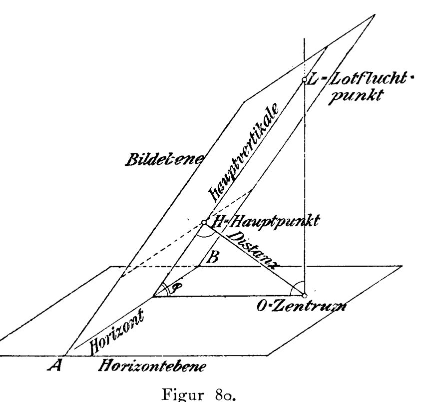
§ 1. Einleitung: Allgemeine Aufgabenstellung.

Heute haben wir uns vorgenommen, das Wesen der Photogrammetrie kennen zu lernen. Ich denke, Sie alle werden gerade deshalb diesem neuen Zweige der angewandten Mathematik Ihr besonderes Interesse widmen, einmal weil dieses Gebiet Ihnen gewiß noch wenig bekannt sein dürfte, so überaus mannigfach auch seine praktische Verwendung ist, andrerseits weil es in der Tat auch für den Schulunterricht in der darstellenden Geometrie dem Schüler äußerst anregende Beispiele darbietet. Ich möchte mich denn auch im folgenden wesentlich

auf die elementaren Methoden der Photogrammetrie beschränken, wie sie eben auch für den Schulunterricht in geeigneter Form unmittelbar verwandt werden können. Da wohl in keinem Lehrbuche der darstellenden Geometrie bisher auf diesen Gegenstand eingegangen wird, so möchte ich nicht unterlassen, zunächst seine geometrische Theorie Ihnen ausführlicher vorzutragen, um im Anschluß daran von seinen Anwendungen zu sprechen.

Die Aufgabe der Photogrammetrie ist kurz gesagt die Umkehrung derjenigen der malerischen Perspektive, nämlich:

(1) Die Photogrammetrie verlangt, aus einer oder mehreren gegebenen Perspektiven eines räumlichen Gebildes seine wahre Gestalt zu rekonstruieren, — von unserem Standpunkt der darstellenden Geometrie aus, um eben die Lösung auf dem Zeichenbrett durchführen zu können, am einfachsten durch Bestimmung des Grund- und Aufrisses. Daß hiernach die Photogrammetrie vortrefflich dazu beiträgt, die Gesetze der malerischen Perspektive dem Schüler zur vollen Klarheit zu bringen, dürfte aus dieser Aufgabenstellung von vornherein einleuchten. Man wird auch finden, daß die Übungsbeispiele für die Photogrammetrie sich in großer Zahl ganz natürlich darbieten, während doch diejenigen der malerischen Perspektive meist mehr oder weniger künstlich ausgewählt werden, sodaß die Aufgaben der Photogrammetrie in dieser Hinsicht ihre Vorzüge vor denen der Perspektive besitzen.



Figur 80.

Zunächst gilt es, einen wichtigen Begriff einzuführen, bei dessen Definition dieselben Bezeichnungen (vgl. Fig. 80)[1]) wie in der malerischen Perspektive benutzt werden.

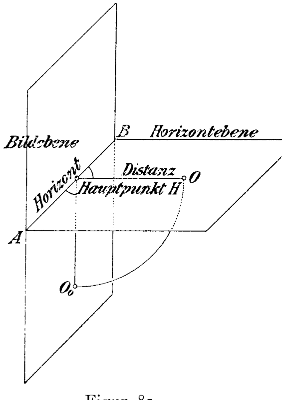
(2) Unter der „*ersten Orientierung*“ einer irgendwie gegebenen Perspektive, etwa der Photographie eines

1) Der Hauptpunkt H ist der Fußpunkt der Hauptachse, d. h. des Lotes vom Zentrum O (Augenpunkt) auf die Bildebene, die Entfernung OH die Distanz. Der Horizont h ist die Schnittlinie der Bildebene mit der durch O gehenden Horizontebene.

Gebäudes oder einer Landschaft, verstehen wir die Angabe der Distanz, der Lage des Hauptpunktes und des Horizontes.[1])

Hier gelten folgende Sätze:

(3) Bei einer vertikalen Bildebene liegt der Hauptpunkt in dem Horizont und umgekehrt (Fig. 81).



Figur 81.

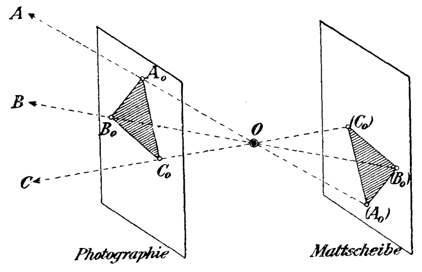
(4) Bei geneigter Bildebene ist durch die erste Orientierung zugleich der Neigungswinkel φ der Bildebene gegen die Horizontebene gegeben, ebenso der „Lotfluchtpunkt“ L, d. h. der Fluchtpunkt aller vertikalen Geraden (Fig. 80).

Letzterer liegt als Schnitt der Bildebene mit der vertikalen Geraden durch den Augenpunkt in der „Hauptvertikalen“, d. h. der vom Hauptpunkt auf den Horizont gefällten Senkrechten. Eine darauf sich beziehende Bemerkung wollen wir gleich hier anschließen für den Fall, daß die gegebene Perspektive, wie zumeist, eine photographische Aufnahme ist. Denken wir die entwickelte photographische Platte wie bei der Aufnahme in den Apparat gelegt und alle Punkte ihres Bildes mit dem Objektivmittelpunkt (Zentrum, Augenpunkt, Standpunkt der Aufnahme) verbunden[2]), so liegen die wahren Objektpunkte auf den Verlängerungen dieser Strahlen über den Objektivmittelpunkt hinaus. Statt dessen wollen wir stets im folgenden

1) Die „erste Orientierung“ ist verschieden von der „inneren Orientierung“; letzterer Begriff wurde von Herrn S. Finsterwalder eingeführt („Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie“, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VI, 2, 1899, p. 1—41, insbesondere p. 8) und umfaßt bei einer Bildebene nur die Distanz und den Hauptpunkt. Den Gegensatz zur inneren Orientierung bildet bei Herrn S. Finsterwalder die „äußere Orientierung“, nämlich die Angabe der „Größen, welche das Zentrum O und die Richtung der Perspektivachse im Raum, bezw. gegen das Objekt, bestimmen“. Der Horizont ist also ein Bestandteil der äußeren Orientierung; doch da es für unsere ganze folgende Betrachtung wünschenswert ist, den Horizont zu den Elementen der inneren Orientierung sogleich hinzuzunehmen, so haben wir den neuen Begriff der ersten Orientierung gebildet. Vgl. auch die Definition der „zweiten Orientierung“ p. 131.

2) Der Einfachheit halber wollen wir von der komplizierten Einrichtung und Wirkungsweise des photographischen Objektivs hier absehen.

das von der Platte kopierte photographische Bild in die bezüglich des Objektivmittelpunkts zur Platte symmetrische Lage gebracht denken, sodaß die Halbstrahlen von letzterem nach den Bildpunkten direkt durch die Objektpunkte gehen (Fig. 82).



Figur 82.

Mein fernerer Vortrag wird sich nun in folgende drei Abschnitte gliedern:

I. Entwicklung der photogrammetrischen Methoden, falls nur eine einzige Perspektive gegeben ist.

II. Erweiterung dieser Methoden auf den Fall, daß zwei oder mehrere Perspektiven gegeben sind.

III. Besprechung der verschiedenen praktischen Anwendungen der Photogrammetrie.

Erster Abschnitt: Entwicklung der photogrammetrischen Methoden bei einer einzigen gegebenen Perspektive.

§ 2. Methoden zur Bestimmung der ersten Orientierung.

Es sei nur eine einzige Perspektive des räumlichen Gebildes gegeben. Hier bieten sich sogleich die beiden folgenden Aufgaben dar:

1) Wie findet man zunächst die erste Orientierung der Perspektive?

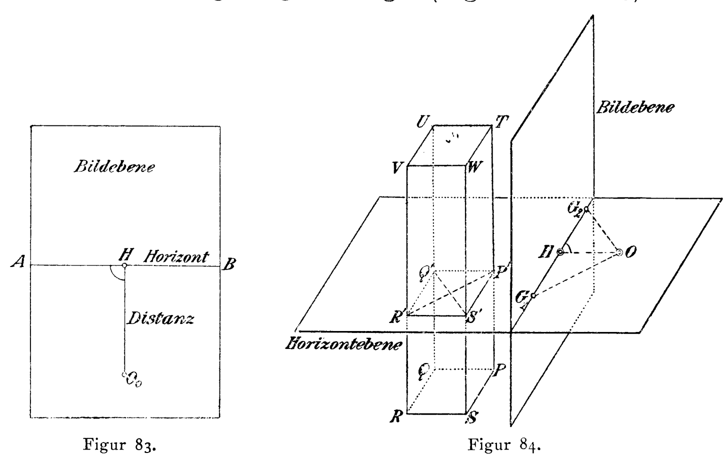
2) Wie läßt sich dann das Objekt selbst rekonstruieren?

Hinsichtlich der Lösung der ersten Aufgabe möchte ich zwei verschiedene Gruppen von Sätzen nacheinander zusammenstellen, deren Anwendung wir als die „unmittelbare“ und die „mittelbare“ Methode unterscheiden können.

a) Die erste Gruppe von Sätzen setzt voraus, daß es sich um die Perspektive eines architektonischen Gebildes (etwa die Photographie eines Gebäudes oder des Inneren eines Zimmers) handelt und wir also von vornherein über gewisse geometrische Eigenschaften orientiert sind, z. B. darüber, daß bestimmte Geraden des Bildes in Wirklichkeit horizontal oder parallel sind.

α) Es sei fernerhin zunächst die Bildebene eine ver-

tikale, sodaß vertikale Geraden des Raumes durch vertikale Bildgeraden dargestellt sind, und die Horizontebene sei um den Horizont in die Bildebene umgelegt, wobei der Augenpunkt O nach O_0 gelangen möge (Fig. 81 und 83). Bei der



Figur 83. Figur 84.

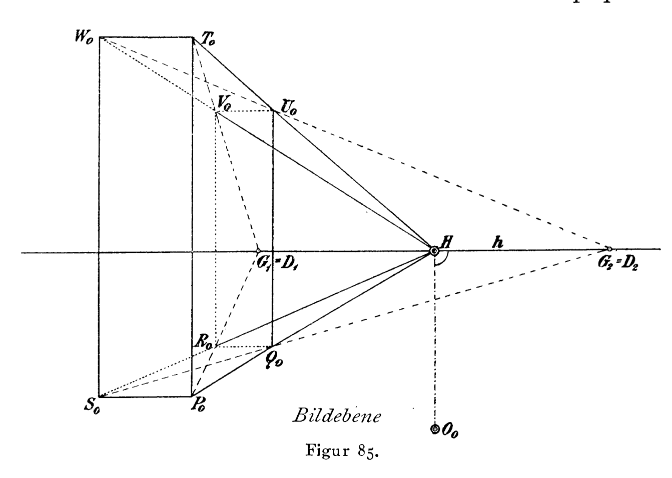
Bestimmung der ersten Orientierung kommen die vier Elemente in Betracht, die natürlich nicht unabhängig voneinander sind: der Horizont AB, der Hauptpunkt H, das umgelegte Zentrum O_0 und die Distanz O_0H. Um unsern Betrachtungen eine bestimmte anschauliche Grundlage zu geben, wollen wir sie an dem perspektivischen Bilde eines Parallelepipeds mit vertikalen Seitenkanten und horizontaler Basis entwickeln. Das Parallelepiped wollen wir dann bald als ein ganz allgemeines, bald speziell als ein rechtwinkliges oder gar als eines mit quadratischer Basis wählen.[1])

Lassen Sie uns zunächst an die Perspektive einer solchen rechtwinkligen Säule in Frontstellung (vgl. p. 91) denken; Figur 84 soll die Verhältnisse im Raume veranschaulichen,

1) Schon J. H. Lambert hat in seinem Buch: Freye Perspektive oder Anweisung, jeden perspektivischen Grundriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen (2 Bde., Zürich, I. Aufl. 1759, II. Aufl. 1774), im achten Abschnitt (Bd. I, p. 176—206) ausführliche Regeln zur Rekonstruktion des Horizonts und des Augenpunkts aus einer vorhandenen Perspektive gegeben, um sowohl die Richtigkeit der Perspektive zu prüfen wie auch auf das Objekt zurückzuschließen. Seine klaren Ausführungen sind recht lesenswert und noch heute zum Studium zu empfehlen. Lambert ist daher als Begründer der Photogrammetrie zu bezeichnen, wenn auch erst Jahrzehnte später nach Erfindung der Photographie dieselbe neu entdeckt wurde und zu praktischer Bedeutung gelangte.

Figur 85 dagegen die Bildebene, in der zunächst allein das Bild $P_0 Q_0 R_0 S_0$, $T_0 U_0 V_0 W_0$ des Parallelepipedons als gegeben anzusehen ist.[1]) Wir können im Anschluß daran sofort folgende Sätze aufstellen:

(5) Die Bilder der zur Bildebene senkrechten Geraden des Raums schneiden sich im Hauptpunkte H;



Figur 85.

hiernach ist auch der Horizont h bestimmt, wenn, wie in unserem Beispiel, die vertikale oder die horizontale Richtung in der Perspektive bekannt ist, und damit auch durch das Lot im Hauptpunkte auf dem Horizont ein Ort für das Zentrum O_0 (Fig. 85).

(6) Ist die in Frontstellung in Perspektive gesetzte Säule quadratisch, so geben die (auf dem Horizont gelegenen) Fluchtpunkte G_1 und G_2 der Basisdiagonalen die „Distanzpunkte" D_1 und D_2, und $HD_1 = HD_2$ ist die gesuchte Distanz $O_0 H$ (Fig. 85).

Weiter führt die Erinnerung an die Übereckperspektive eines allgemeinen Parallelepipeds mit horizontaler Basis, dessen Bild in der Figur 86 wieder durch $P_0 Q_0 R_0 S_0$, $T_0 U_0 V_0 W_0$ gegeben sei, zu den allgemeinen Sätzen:

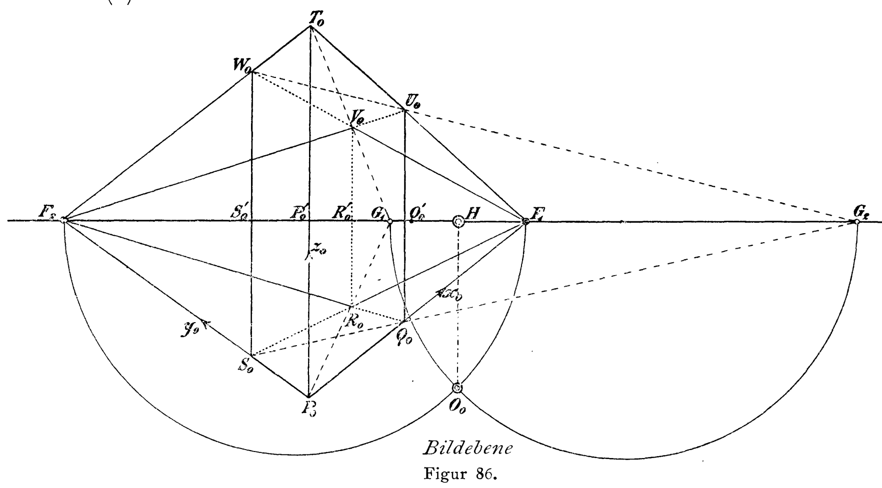
(7) Die Verbindungslinie der Fluchtpunkte F_1 und F_2 zweier Scharen horizontaler Raumgeraden (wie z. B. der horizontalen Kanten des Parallelepipeds) liefert

---

1) Die Bildpunkte seien hier wie im folgenden stets mit dem Index 0, die zugehörigen Originalpunkte ohne Index bezeichnet.

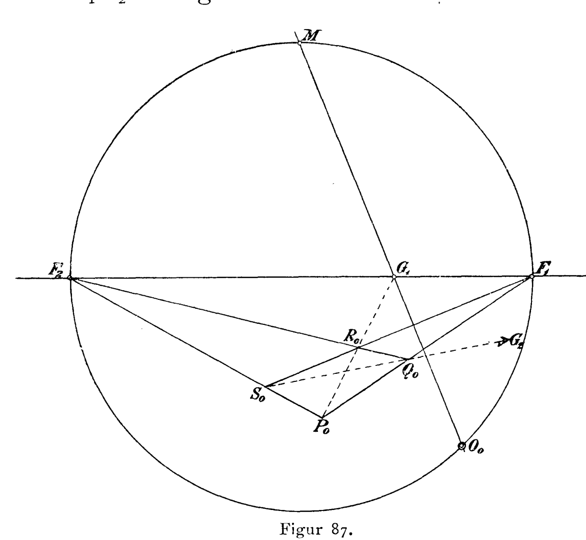
den Horizont und damit einen geometrischen Ort für den Hauptpunkt.[1])

(8) Stehen die beiden Scharen der horizontalen Ge-



Figur 86.

raden aufeinander senkrecht, so ist der Halbkreis über $F_1 F_2$ ein geometrischer Ort für das Zentrum O_0 (Fig. 86).


Figur 87.

Ist im besonderen das Bild einer quadratischen Säule gegeben, so läßt sich der letzte Satz, wie auf die beiden Scharen horizontaler Kanten mit den Fluchtpunkten F_1, F_2, ebenso auf die paarweise zueinander senkrechten Diagonalen der oberen und der unteren Basis mit den Fluchtpunkten G_1 und G_2 anwenden, sodaß als Schnitt der beiden Halbkreise das Zentrum O_0 dann vollständig bestimmt ist[2]) (Fig. 86), m. a. W.:

1) Ähnliches gilt hier wie bei den folgenden Sätzen in bezug auf die Fluchtpunkte zweier Paare paralleler Geraden des Raums in einer beliebigen zur Bildebene senkrechten Ebene.

2) O_0 ist auch einfach zu bestimmen als Schnitt des Halbkreises über $F_1 F_2$

(9) Ist die vertikale Perspektive einer quadratischen, aufrechtstehenden Säule gegeben, so ist aus ihr ohne weiteres die erste Orientierung vollständig zu konstruieren.

Eine Anwendung findet dieser letzte Satz, wenn etwa die Photographie eines Denkmals mit quadratischem Unterbau oder einer Kirche mit einem Turm von quadratischer oder, was im wesentlichen das Gleiche ist, regulär-achtseitiger Grundfläche gegeben ist. Hierfür geben Ihnen die vorliegenden Photographieen des Wöhlerdenkmals und der Friedhofskapelle in Göttingen Beispiele (Fig. 88 und 89; bei dem letzteren ist überdies zur Ausführung der Zeichnung, insbesondere des Grundrisses, die Tatsache zu benutzen, daß das Gebäude symmetrisch gebaut ist).



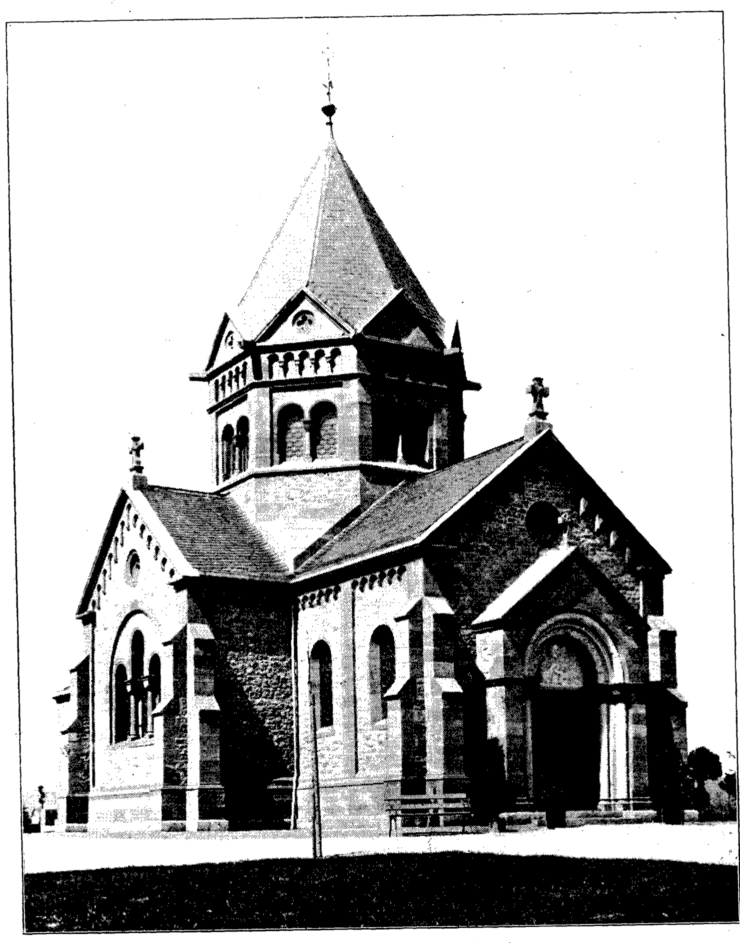
Figur 88. Wöhlerdenkmal in Göttingen.

Ferner gilt:

(10) Falls die beiden Scharen horizontaler Raumgeraden miteinander den gegebenen Winkel ϑ bilden, so ist der Kreisbogen über der Verbindungslinie ihrer beiden Fluchtpunkte mit ϑ als Peripheriewinkel ein geometrischer Ort für das Zentrum O_0.

mit der Verbindungslinie des Fluchtpunkts G_1 und der Mitte M des ergänzenden Halbkreises, was besonders dann in Betracht kommt, wenn etwa G_2 außerhalb der Zeichenfläche liegt (Fig. 87). Vgl. J. H. Lambert, l. c. Bd. I. p. 186.

Auch dieser Satz kommt z. B. dann zur Anwendung, wenn etwa das Bild eines Turmes mit regulärem sechs- oder achtseitigen Grundriß gegeben ist, für dessen Basiskanten ϑ gleich 60°, 120° bezw. 45°, 135° ist.



Figur 89. Friedhofskapelle in Göttingen.

Wir setzen wieder die Perspektive einer rechtwinkligen Säule voraus. Es sei nun das Verhältnis $a:b$ der wahren Längen der Basiskanten PQ und PS (Fig. 86) bekannt; z. B. wenn es sich um das Bild eines Gebäudes mit rechteckiger Grundfläche handelt, sei dies Verhältnis durch unmittelbare Ausmessung von Länge und Breite gewonnen. Dann läßt sich hieraus ein ähnliches Bild der Basis zeichnen, und damit sind

die Winkel bekannt, welche die Diagonalen miteinander und den Basiskanten bilden. Es läßt sich daher unmittelbar der letzte Satz anwenden, wenn man die Fluchtpunkte G_1, G_2 der beiden Diagonalen oder einen derselben mit einem der Fluchtpunkte F_1, F_2 der Basiskanten zusammennimmt, wie es gerade bequem ist, d. h.:

(11) Ist außer der vertikalen Perspektive einer *rechtwinkligen* Säule das Verhältnis der wahren Längen der Basiskanten gegeben, so läßt sich die erste Orientierung ohne weiteres nach den Sätzen (7), (8), (10) konstruieren.[1])



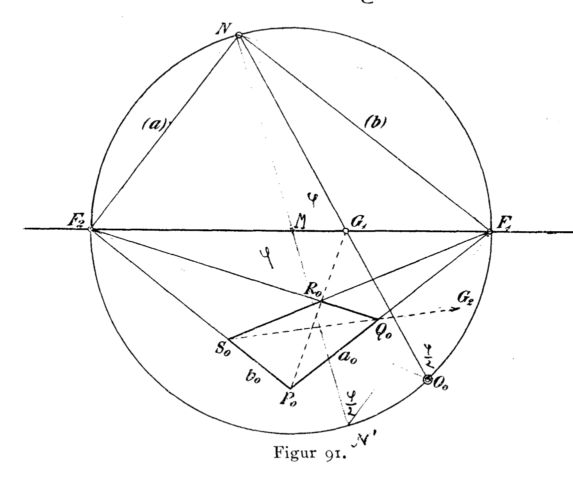
Figur 90. Bürgerdenkmal in Göttingen.

Ein Beispiel bietet das Bürgerdenkmal in Göttingen (Fig. 90) dar, bei dem die rechteckige unterste Stufe 232 cm breit und 224 cm tief ist.

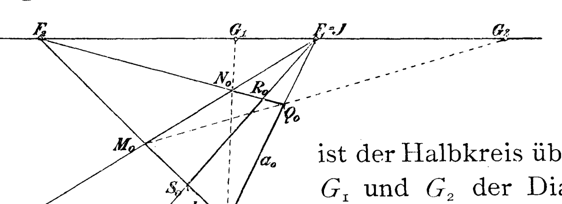
Um diesen letzten Satz zu verallgemeinern, denken wir nun das perspektivische Bild einer senkrechten Säule mit einem Parallelogramm als Basis gegeben. Wieder sei das Verhältnis $a:b$ der wahren Längen der

1) Die Konstruktion von O_0 läßt sich unter Umständen wieder wie folgt vereinfachen (Fig. 91): Man konstruiere auf demjenigen Halbkreis über F_1F_2, der den als geometrischen Ort für O_0 benutzten Halbkreis ergänzt, den Punkt N so, daß $F_2N:NF_1$ gleich dem gegebenen Verhältnis $a:b$ ist. Der Schnitt der Verbindungslinie NG_1 liefert auf dem andern Halbkreis den gesuchten Punkt O_0 (vgl. Lambert, l. c. I. p. 188).

Basiskanten $PQ : PS$ gegeben. Man konstruiere dann (Fig. 92) auf der Bildgeraden $P_0 S_0$ eine solche Strecke $P_0 M_0$, deren wahre Größe $PM = PQ$ ist. Zu diesem Zwecke projiziert man von einem beliebigen Punkte J des Horizontes — am einfachsten von F_1 aus, falls dieser Punkt in der Zeichenebene liegt — den Punkt S_0 nach K auf die Parallele durch P_0 zu $F_1 F_2$, trägt auf der Verlängerung von JP_0 von P_0 aus $P_0 A = a$, $P_0 B = b$ ab. Der Schnitt L von $P_0 K$ mit der Parallelen durch B zu AK liefert dann mit J verbunden den gesuchten Punkt M_0 auf $P_0 F_2$. Bezeichnet man noch den Schnitt von $M_0 F_1$ und $Q_0 F_2$ mit N_0, so ist $P_0 M_0 N_0 Q_0$ das Bild eines horizontalen Rhombus. Da dessen Diagonalen in Wirklichkeit aufeinander senkrecht stehen, so ist der Halbkreis über den Fluchtpunkten G_1 und G_2 der Diagonalen ein Ort für O_0, d. h.:



Figur 91.



Figur 92.

(12) Ist bei der vertikalen Perspektive einer senkrechten Säule mit parallelogrammatischer Basis das Verhältnis der Grundkanten gegeben, so ist dem Vorstehenden gemäß damit außer dem Horizont ein Halbkreis als geometrischer Ort für das Zentrum O_0 bestimmt.[1])

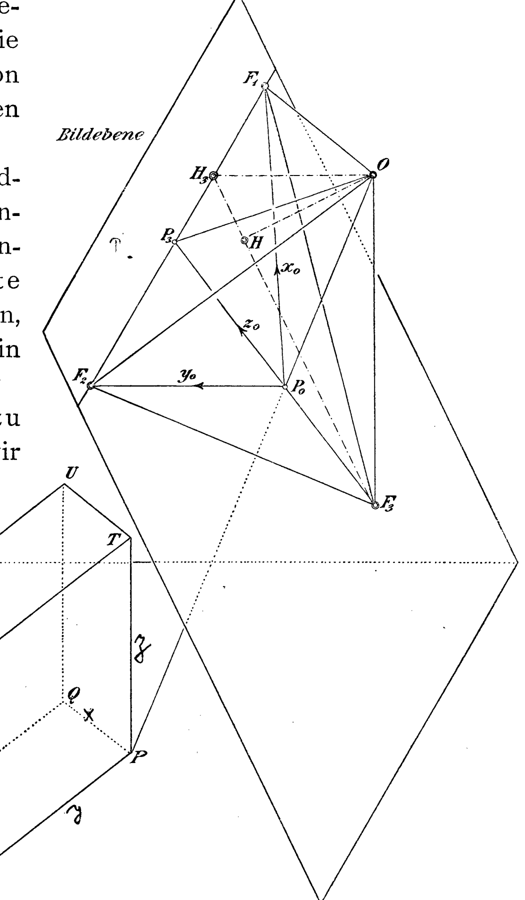
Man kann leicht noch eine Reihe weiterer solcher Sätze zur Bestimmung von Stücken der ersten Orientierung aufstellen; ich will mich damit begnügen, nur noch den folgenden zu nennen:

(13) Sind in einer gegebenen Perspektive die Bilder

1) Vgl. LAMBERT, l. c. I. p. 191, § 307.

A_0B_0 und B_0C_0 zweier gleicher, sich aneinander schließender Strecken einer horizontalen Geraden des Raumes gegeben, so ist der vierte harmonische Punkt F zu den drei Punkten A_0, B_0, C_0 der Fluchtpunkt der Geraden und demnach ein Punkt des Horizonts. Dieser Satz kann z. B. dann von Nutzen sein, wenn auf einer horizontalen Gebäudekante etwa durch die Fensterreihe die Bilder von in Wirklichkeit gleichen Strecken bestimmt sind.

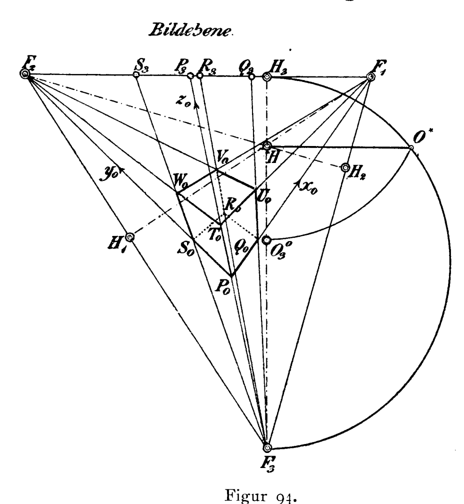
β) War bisher die Bildebene stets vertikal orientiert, so wollen wir im Gegensatz dazu nun eine geneigte Bildebene voraussetzen, um wieder zunächst allein die Bestimmung der ersten Orientierung zu erörtern. Doch wollen wir



Figur 93.

jetzt nur Perspektiven von Objekten mit drei Scharen zueinander senkrechter Geraden, von denen eine überdies im Raum vertikal orientiert ist, unsrer Betrachtung zugrunde legen. Solche Bilder liefert bei nicht vertikaler Plattenstellung die Photographie eines einfachen Gebäudes, dessen Grundform ein recht-

winkliges Parallelepiped darstellt. Durch die Fig. 93 sei die perspektivische Abbildung einer solchen aufrechtstehenden rechtwinkligen Säule im Raume angedeutet; die vom Augenpunkte O ausgehenden Parallelen zu den drei Kantenrichtungen treffen die Bildebene in den Fluchtpunkten F_1, F_2, F_3. Wir gewinnen somit den Anschluß an eine besondere Methode der malerischen Perspektive, die sogenannte „perspektivische Axonometrie", da wir die von einem Eckpunkt, etwa P, ausgehenden Kantenrichtungen PQ, PS, PT als die drei Koordinatenachsen ansehen können.[1])



Figur 94.

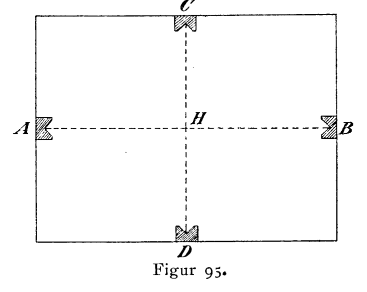
(14) Ist die Perspektive $P_0Q_0R_0S_0$, $T_0U_0V_0W_0$ einer aufrechtstehenden rechtwinkligen Säule auf eine zu keiner Kante parallele Bildebene gegeben (Fig. 94), so sind damit auch die Fluchtpunkte F_1, F_2, F_3 der drei Kantenrichtungen bestimmt. Die Verbindungslinie von F_1 und F_2, den Fluchtpunkten der im Raum horizontalen Kanten, liefert den Horizont, der Fluchtpunkt F_3 der vertikalen Kanten den Lotfluchtpunkt. Der Hauptpunkt H ergibt sich als Schnittpunkt der Höhen F_iH_i im „Fluchtpunktdreieck" $F_1F_2F_3$. Legt man endlich das bei O rechtwinklige Dreieck F_3H_3O um die Hypotenuse F_3H_3 in die Zeichenebene nach $F_3H_3O^*$ um, so ist HO^* die Distanz und der Winkel $O^*H_3F_3$ oder besser sein Nebenwinkel der Neigungswinkel φ der Bildebene gegen die Horizontebene OF_1F_2.

Kurz gesagt gestattet daher die Perspektive einer aufrechtstehenden rechtwinkligen Säule bei geneigter Bildebene

1) Auch bei den zu den Sätzen (5)—(12) führenden Betrachtungen können wir die von dem Eckpunkt P des Parallelepipeds ausgehenden Kantenrichtungen als ein schief- oder rechtwinkliges Achsenkreuz deuten, das im Bilde mit seinen drei Fluchtpunkten gegeben ist (vgl. Fig. 86); nur liegt der Fluchtpunkt F_3 der vertikalen Achsenrichtung dort im Unendlichen.

ohne weiteres die gesamte erste Orientierung zu bestimmen. Dies Resultat ist besonders deswegen höchst eigenartig und überraschend, weil in diesem allgemeinen Fall sich also unmittelbar mehr konstruieren läßt als in dem besonderen, wo die Bildebene zu einer der Kantenrichtungen parallel ist.

b) Wie ich schon sagte (p. 101), stellt sich neben die bisher besprochenen Sätze, welche sich auf die Bestimmung der ersten Orientierung beziehen, noch eine zweite Gruppe von solchen Sätzen zu gleichem Zweck, die jedoch im Gegensatz zu den ersteren die Benutzung von Hilfsapparaten oder spezieller Hilfsmittel der photographischen Kamera voraussetzen. Ich möchte erst später von der Einrichtung solcher photogrammetrischen Instrumente sprechen (p. 180 ff.), wenn wir mit den verschiedenen praktischen Anwendungen der Photogrammetrie uns vertraut gemacht haben, da diesen sich anpassend die Instrumente verschieden ausgebildet sind. Hier seien nur folgende Sätze hervorgehoben:



Figur 95.

(15) Die Kamera kann so eingerichtet sein, daß vier Marken am Rande der Platte bei der Aufnahme sogleich mit photographiert werden, die, wie Figur 95 es andeutet, kreuzweise miteinander verbunden sogleich den Hauptpunkt H liefern. Die Verbindungslinie CD ist überdies zumeist, nämlich wenn der Apparat dementsprechend aufgestellt ist, die Hauptvertikale und die andere AB, falls die Platte bei der Aufnahme vertikal steht, der Horizont.

(16) Ist die Brennweite des photographischen Objektivs bekannt, so gibt sie bei der Aufnahme hinreichend weit entfernter Objekte direkt die Distanz an. Hat man bei der Aufnahme näherer Objekte die Abweichung von der Brennweite mit bestimmt (dazu ist bei vollkommenen Apparaten eine besondere Skala angebracht), so ist damit ebenfalls die Distanz bekannt.[1])

1) Sollte beim Kopieren der Aufnahme das photographische Papier eine merkliche Ausdehnung oder Zusammenziehung gegenüber der Platte erlitten haben, so ist die Distanz dementsprechend zu korrigieren (vgl. p. 172).

(17) Ist dann z. B. bei einer vertikalen Aufnahme außer der so bestimmten Distanz der Horizont gegeben, etwa nach Satz (7), so liefert die Parallele zum Horizont im Abstande der Distanz einen geometrischen Ort für den Augenpunkt O_0.

Die Vereinigung dieses Satzes etwa mit dem Satze (8) würde für den Augenpunkt O_0 zunächst zwei Lagen ergeben, aus denen jedoch die richtige meist schon dadurch sich auswählen läßt, daß sie ungefähr in der Mitte der Photographie liegt.

(18) Der photographische Apparat kann mit Einrichtungen ausgestattet sein, welche bei geneigter Bildebene den Neigungswinkel φ unmittelbar abzulesen erlauben. Der Horizont ist dann bestimmt, falls außerdem der Hauptpunkt, die Hauptvertikale und die Distanz (etwa nach den Sätzen (15) und (16)) bekannt sind.

(19) Bei einer vertikalen Aufnahme sei zugleich von demselben Standpunkt aus der „Horizontalwinkel ψ" zweier auch im Bilde vorhandener Punkte A, B des Objekts, z. B. zweier Turmspitzen, gemessen (d. h. der Winkel, welchen die durch das Lot des Objektivmittelpunktes und je einen der Punkte gehenden Ebenen miteinander einschließen), etwa mit einem Theodoliten oder besonderen Einrichtungen der Kamera („Phototheodolit" vgl. p. 180); dann ist in der Bildebene der Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel ψ über dem Abstand der Fußpunkte A_0', B_0' der Senkrechten von den Bildpunkten A_0, B_0 auf den Horizont ein Ort für das Zentrum O_0.

Während die Sätze (1)—(14) architektonische Objekte voraussetzen, lassen sich die Sätze (15)—(19) auch dann anwenden, wenn es sich um Aufnahmen des freien Geländes, z. B. einer Gebirgslandschaft, handelt. Daß es im übrigen möglich ist, zur vollständigen Bestimmung der ersten Orientierung die verschiedensten Kombinationen aller dieser Sätze zu benutzen, brauche ich wohl kaum hervorzuheben.

§ 3. Rekonstruktion des Grund- und Aufrisses des Objektes.

Wir setzen nun im folgenden voraus, daß die erste Orientierung des gegebenen perspektivischen Bildes

bekannt sei, und wenden uns jetzt zu der zweiten Aufgabe: Wie läßt sich das Objekt selber, d. h. sein Grund- und Aufriß, rekonstruieren (oder auch sein Grundriß mit Angabe der Höhen der einzelnen Punkte nach der Methode der kotierten Projektionen, vgl. p. 59)?

Jeder Punkt des Objektes liegt offenbar auf dem Strahl vom Augenpunkte nach dem Bildpunkte, das gegebene Objekt ist gleichsam einzupassen in das vom Augenpunkte ausgehende Strahlenbündel. Doch da das perspektivische Bild eines Objekts unverändert bleibt, wenn man es vom Augenpunkte aus ähnlich vergrößert oder verkleinert, so ergibt sich zunächst der Satz:

(20) Die Perspektive samt der ersten Orientierung gestattet allein nicht mehr als die ähnliche Gestalt des Objekts zu rekonstruieren; dessen wahre Größe wird demnach erst durch die Kenntnis der wahren Länge einer einzigen Strecke des Objekts bestimmt.[1])

Dies entspricht durchaus der Tatsache, daß wir das Objekt im allgemeinen ohnehin im kleineren Maßstabe auf dem Zeichenbrett konstruieren; die bekannte Länge einer Strecke bestimmt also den Maßstab der Zeichnung.

α) Was zunächst die Lösung unserer Aufgabe bei vertikaler Stellung der Bildebene betrifft, so wollen wir unsere Betrachtung wieder an das bestimmte Beispiel anknüpfen, das die vertikale Übereckperspektive einer aufrecht stehenden rechtwinkligen Säule mitsamt dem Horizont und dem umgelegten Augenpunkt darstellt (Fig. 86, p. 104).

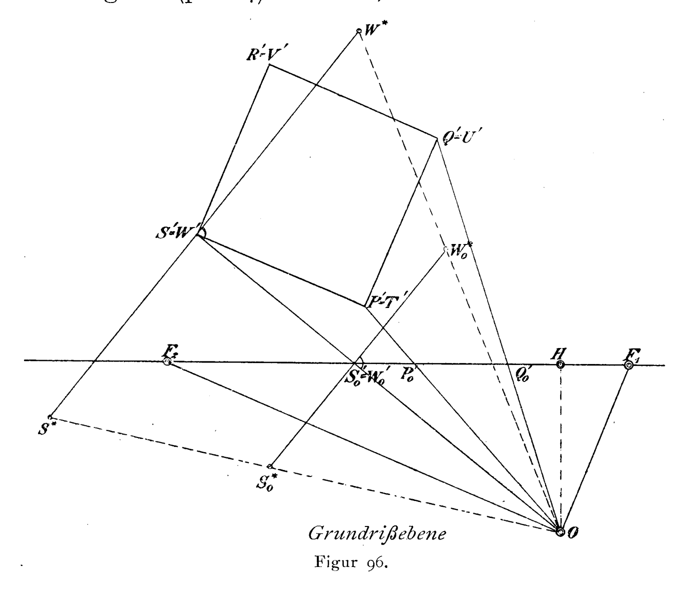
Als Grundrißebene sei einfach die durch den Augenpunkt gehende Horizontebene gewählt, die wir wieder um den Horizont in die Bildebene umgelegt denken (vgl. Fig. 81). Damit jedoch bei der Ausführung der Zeichnung die Linien sich nicht in unübersichtlicher Weise überdecken, wollen wir auf dem Zeichenbrett die umgelegte Grundrißebene samt dem Horizont, Hauptpunkt H und Augenpunkt O in ihr zur Seite verschieben, sodaß sie neben der Bildebene liegt.[2]) Es wird dann wieder-

1) Um die wahre Länge einer Bildstrecke zu kennen, kann man beispielsweise bei einer photographischen Aufnahme eine vertikal aufgestellte Nivellierlatte von bekannter Länge oder etwa eine Person, deren Größe man kennt, mitphotographieren.

2) In der Grundrißebene sei der Augenpunkt stets mit O, in der Bildebene seine Umlegung wie bisher mit O_0 bezeichnet.



holt notwendig sein, Punkte des Horizontes von der Bildebene auf die Grundrißebene zu übertragen. Man benutzt in komplizierten Beispielen hierzu am einfachsten einen schmalen Papierstreifen, ein sogenanntes Schneidermaß, indem man auf ihm die Entfernungen der einzelnen Punkte vom Hauptpunkt aus markiert. Die Rekonstruktion des Grundrisses bei unserm Beispiel bietet nach diesen Vorbereitungen keine Schwierigkeit mehr. In der Fig. 96, welche die Grundrißebene für die Bildebene der Fig. 86 (p. 104) darstellt, sind zunächst die Grundrisse



Figur 96.

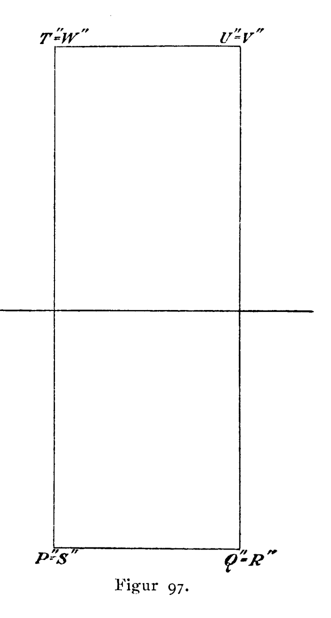
P_0', Q_0', R_0', S_0' der Bildpunkte P_0, Q_0, R_0, S_0 und die Fluchtpunkte F_1, F_2 von der Bildebene (Fig. 86) her übertragen und mit dem Augenpunkte O verbunden. Es gilt dann:

(21) Der Grundriß P' eines beliebigen Punktes P liegt auf dem Strahle vom Augenpunkte O nach dem Grundriß P_0' des Bildpunktes P_0.

Auf dem ersten dieser Strahlen, auf OP_0', können wir den Punkt P' entsprechend dem Satze (20) noch willkürlich wählen. Wo die Parallelen durch P' zu OF_1 und OF_2 die Strahlen OQ_0' und OS_0' schneiden, liegen alsdann die Grundrisse Q' und S', aus denen sofort auch R' folgt. Die Punkte T', U', V', W' schließlich fallen entsprechend mit P', Q', R', S' zusammen.

Um nun noch den Aufriß der Säule auf eine beliebige

Ebene darstellen zu können, bleiben die Höhen der einzelnen Punkte über den zugehörigen Grundrißpunkten zu bestimmen. Was z. B. den Punkt S anlangt, so denken wir das bei S' rechtwinklige Dreieck $OS'S$ um OS' in die Grundrißebene nach $OS'S^*$ umgelegt, wo $S'S^*$ die gesuchte Höhe darstellt (Fig. 96). Der zu ihrer Bestimmung notwendige Punkt S^* ist als Schnittpunkt des Lotes in S' auf OS' und der Geraden OS_0^* gegeben, wo S_0^* auf dem Lote in S_0' auf OS' liegt und $S_0'S_0^*$ aus der Bildebene (Fig. 86) gleich $S_0'S_0$ zu entnehmen ist. [Ebenso findet man die Höhe $W'W^*$ des Punktes W, dessen Grundriß W'' mit S' zusammenfällt, durch Konstruktion des Punktes W^* auf der Verlängerung von S^*S' und auf dem Strahl OW_0^*, wo $S_0'W_0^*$ gleich der Strecke $S_0'W_0'$ in der Bildebene (Fig. 86) ist.] In der Fig. 97 ist der hieraus sich ergebende Aufriß der Säule auf eine zur Seitenfläche $PQUT$ parallele Ebene dargestellt. Das Wesentliche dieser Konstruktion wird durch den Satz ausgesprochen:



Figur 97.

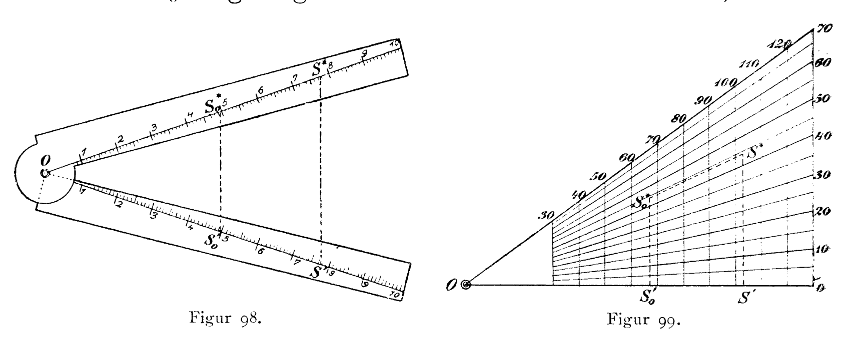
(22) Die Bestimmung der (etwa noch nicht anderweit bekannten) Höhe jedes einzelnen Punktes erfordert die Umlegung eines rechtwinkligen Dreiecks.

Sie werden bei diesem Beispiel leicht übersehen, wie die Konstruktion des Objekts in komplizierteren hierher gehörenden Fällen verläuft. Um dies noch näher anzudeuten, fassen wir etwa die von P auslaufenden Strahlen $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PT}$ unseres Beispiels als x-, y-, z-Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems auf (Fig. 86), alsdann gilt der Satz:

(23) Wie vom Punkte V des Beispiels mit den „perspektivischen Koordinaten" P_0Q_0, P_0S_0, P_0T_0 kann man den Grund- und Aufriß von jedem andern Punkte rekonstruieren, dessen perspektivische Koordinaten man im Bilde besitzt.

Zusatz I. Bei der Konstruktion der Höhe eines Punktes (wie von $S'S^*$) nach dem Satze (22) handelt es sich im Grunde um die Bestimmung der vierten Proportionale zu drei gegebenen

Strecken ($S'S^* : S_0'S_0^* = OS' : OS_0'$). Bei komplizierten Bauwerken oder andern praktischen Beispielen empfiehlt es sich, die wiederholte Ausführung dieser Aufgabe, auch um das Zeichenblatt nicht mit zu vielen Linien zu überdecken, wie folgt zu vereinfachen: Entweder benutzt man einen sogenannten Proportionalzirkel.[1]) Dieser besteht aus zwei um ein Scharnier drehbaren Linealen (Fig. 98), die auf Geraden vom Drehpunkt aus zwei gewöhnliche Teilungen besitzen. Denkt man sich in Beziehung auf unser obiges Beispiel auf der einen Geraden die Strecke OS_0' abgetragen und öffnet den Zirkel soweit, bis die



Figur 98. Figur 99.

Strecke von S_0' nach dem korrespondierenden Punkte des andern Schenkels gleich $S_0'S_0 = S_0'S_0^*$ wird, so gibt die Entfernung des durch OS' bestimmten Punktes auf dem ersten Schenkel von dem entsprechenden Punkte des andern unmittelbar die gesuchte vierte Proportionale $S'S^*$. Oder aber man wendet ein auf Pauspapier gezeichnetes Proportionalschema (Fig. 99) an.[2]) Es besteht aus je einer Schar von Radienvektoren und Ordinatenlinien, den gleichförmigen Einteilungen an den äußeren Seiten des Schemas entsprechend. Beim Gebrauch wird (wie Fig. 99 gestrichelt andeutet) der Anfangspunkt O des Schemas mit einer Nadel auf der Grundrißebene im Augenpunkte be-

1) Vgl. N. Fialkowski, Zeichnende Geometrie, Wien-Leipzig, 1880, p. 16 und Tafel XVI Fig. 125 c.

2) Solche habe ich bei Hrn. Kgl. Baurat W. Körber, Privatdozenten an der Technischen Hochschule in Charlottenburg, der sie seinen Schülern zum Selbstkostenpreis (60 Pf.) zur Verfügung stellt, im praktischen Gebrauch kennen gelernt. Dieses „Körbersche Strahlendiagramm“ findet übrigens auch für direkte größere perspektivische Zeichnungen sehr zweckmäßige Verwendung. Auch in E. Deville: Photographic surveying including the elements of descriptive geometry and perspective, Ottawa 1895, p. 214—215 wird dieses wie das vorige Hilfsmittel besprochen.

festigt, die Abszissenachse mit dem Strahl OS' zur Deckung gebracht, von dem mit S_0' zusammenfallenden Abszissenpunkte aus wird die Strecke $S_0'S_0 = S_0'S_0^*$ auf der Ordinatenlinie abgetragen. Der Schnittpunkt S^* des durch den Endpunkt S_0^* dieser Abtragung gehenden Radiusvektors mit der durch die Abszisse OS' bestimmten Ordinatenlinie liefert mit seiner Ordinate die gesuchte vierte Proportionale $S'S^*$.

Zusatz II. Es sei nur die vertikale Perspektive einer aufrecht stehenden rechtwinkligen Säule gegeben (vgl. Fig. 86); von der ersten Orientierung ist dann allein nach Satz (8) der Halbkreis über F_1F_2 als Ort für das Zentrum O in der Horizontebene bekannt. Die Beziehung der jedesmal rekonstruierten Objekte zueinander bei verschiedener Wahl des Punktes O auf dem Halbkreis wird durch folgenden Satz angegeben:

(24) Sind O_1 und O_2 zwei willkürlich auf dem Halbkreis über F_1F_2 ausgewählte Lagen des Zentrums O und ist die Rekonstruktion des Objektes in beiden Fällen so ausgeführt, daß in Übereinstimmung mit dem Satze (20) für *einen* Bildpunkt, etwa P_0 der genannten Figur, die beiden Originalpunkte P_1 und P_2 mit dem Bildpunkt zusammenfallend gewählt sind, so stehen die beiden rekonstruierten Objekte zueinander in der Verwandtschaft der perspektiven Affinität, wobei die Bildebene die Affinitätsebene und O_1, O_2 zwei einander entsprechende Punkte sind.

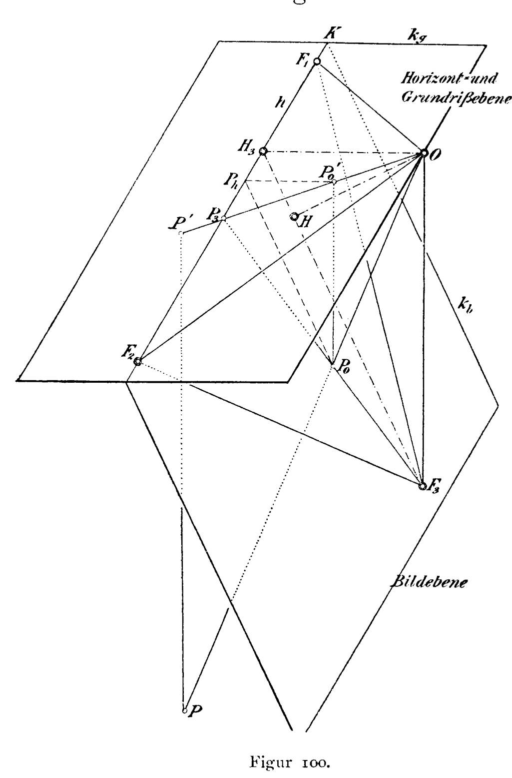
Auf den einfachen Beweis dieses Satzes möchte ich nicht näher eingehen.[1])

β) Wir gehen nun zur Lösung der gleichen Aufgabe, der Rekonstruktion des Objektes selbst, in dem Falle einer geneigten Bildebene über.[2])

1) Der Gedanke dieses Satzes, der eines der einfachsten Beispiele für die Vergleichung der unter verschiedenen möglichen Annahmen rekonstruierten Objekte darstellt, gestattet mannigfache Verallgemeinerungen, besonders wenn mehr als eine Perspektive gegeben sind. Vgl. J. de la Gournerie, Perspective linéaire, 3. Aufl., Paris 1898, G. Hauck, Neue Konstruktionen der Perspektive und Photogrammetrie, Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. XCV, 1883, p. 9, S. Finsterwalder, Referat, l. c. p. 12, und eine demnächst erscheinende Göttinger Dissertation von Hrn. W. Weber.

2) Man vergleiche die von Hrn. C. Koppe besonders für rechnerisches Verfahren gegebene Lösung in seinem Buche: Die Photogrammetrie, Weimar 1889, p. 9—14.

Erste Methode: Wir können sogleich, indem wir wieder die erste Orientierung bereits als bestimmt voraussetzen, an den Satz (14) p. 110 und die ihn begleitenden Fig. 93 und 94 anknüpfen. Als Grundrißebene wollen wir der Einfachheit halber die Horizontebene wählen, d. h. die Ebene OF_1F_2, die zu der in ihrer Lage noch unbekannten xy-Ebene parallel ist (Fig. 100).[1]) Wir denken diese Ebene OF_1F_2, welche ja die Bildebene im Horizont $h = F_1F_2$ schneidet, in die als Zeichenebene gewählte Bildebene umgeklappt, wobei der Augenpunkt O nach O_3^0 auf F_3H_3 fällt (Fig. 94). Doch damit wieder die Grundrißzeichnung das perspektivische Bild selbst nicht überdeckt, wollen wir analog wie früher die umgelegte Grundrißebene mitsamt den Punkten H_3, F_1, F_2 des Horizontes und dem Augenpunkte wieder neben die Bildebene auf dem Zeichenbogen verschieben und den Augenpunkt in dieser Lage der Grundrißebene mit O_3 bezeichnen (Fig. 101). Die genannten vier Figuren 93, 94, 100, 101 werden wir bei unseren folgenden Entwicklungen nun immerfort nebeneinander vor Augen haben müssen.



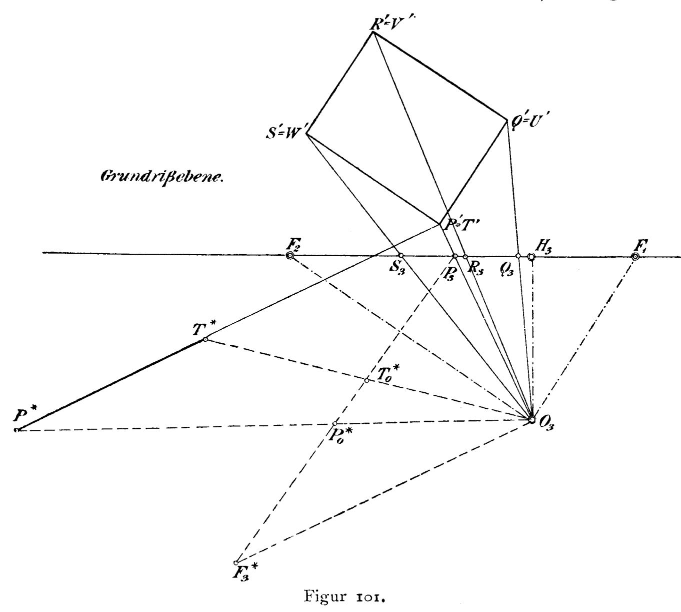
Figur 100.

Um von einem beliebigen Punkte des Bildes, etwa dem Punkte P_0 (Fig. 94), zu dem Grundriß P' des entsprechenden Raumpunktes zu gelangen, mögen Sie beachten, daß die Ebene OF_3P_0, welche in der Geraden OP_3 die Grundrißebene schnei-

1) Die Figuren 93, 94, 100, 101 sind genau einander entsprechend gezeichnet; für die in Kavalierperspektive dargestellten Figuren 93 und 100 ist das Verkürzungsverhältnis für die zur Zeichenebene senkrechte Richtung gleich 1 gewählt.

det, auf letzterer senkrecht steht, da sie ihr Lot OF_3 enthält (Fig. 100).

(25) Der Grundriß P' des einem Bildpunkt P_0 entsprechenden Raumpunktes P (d. h. seine orthogonale Projektion auf die Horizontebene OF_1F_2) liegt demzu-



Figur 101.

folge auf dem Strahl O_3P_3 (Fig. 101) von dem Augenpunkt O_3 nach dem Schnittpunkt P_3 des Horizonts F_1F_2 mit der Geraden F_3P_0 der Bildebene (Fig. 94), wobei zu beachten bleibt, daß der Punkt P_3 natürlich von der Bildebene (Fig. 94) auf die Grundrißebene (Fig. 101) zu übertragen ist.

Hiernach ist der Unterschied von der gleichen Konstruktion bei vertikaler Bildebene klar. Dort werden zunächst die Bildpunkte auf den Horizont F_1F_2 einfach senkrecht (Satz 21), hier vom Fluchtpunkt F_3 aus projiziert; in beiden Fällen liegen die zugehörigen Grundrißpunkte auf den Strahlen vom Augenpunkte nach den so gewonnenen Punkten des Horizontes.

(26) Dem Satz (20) gemäß kann wieder der Grundriß des ersten, etwa des als Koordinatenanfang gewählten Punktes, willkürlich auf dem entsprechenden von O_3 ausgehenden Strahle gewählt werden, wie in unserem Beispiel der Grundriß P' des Punktes P.

Die Parallelen x' und y' von P' zu O_3F_1 und O_3F_2 liefern dann die Grundrißprojektionen der von P ausgehenden x- und y-Achsen.

(27) Der Grundriß V' eines *beliebigen* Punktes V, dessen „perspektivische Koordinaten“ P_0Q_0, P_0S_0 und P_0T_0 im Bilde gegeben sind, oder der damit identische Grundriß R' des Punktes R der xy-Ebene mit den perspektivischen Koordinaten P_0Q_0, P_0S_0, o, ist dann durch die Koordinaten $x' = P'Q'$, $y' = P'S'$ bestimmt, wo Q' und S' durch die Strahlen O_3Q_3 und O_3S_3 auf den von P' ausgehenden x', y'-Achsen abgeschnitten werden (Fig. 101). Daß der Punkt $R' = V'$ auch auf dem Strahl O_3R_3 liegt, wo $R_3 = V_3$ wieder der Schnitt von F_3R_0 mit dem Horizont F_1F_2 ist (Fig. 94), mag als Kontrolle der Zeichnung dienen.

Um den Aufriß des Objekts, d. h. die Höhe jedes einzelnen im Grundriß dargestellten Punktes, wie z. B. die — hier negative — Höhe des Punktes P über der Grundrißebene zu finden, denken wir die Ebene $OP'P$, welche auch durch die Punkte P_0, F_3 geht (Fig. 100), um OP' in die Grundrißebene umgelegt. Der umgelegte Punkt F_3^* (Fig. 101) ist auf dem Lote in O_3 auf O_3P' durch $F_3^*O_3 = F_3O^*$ (Fig. 94) und die Umlegung P_0^* des Punktes P_0 auf $F_3^*P_3$ durch $F_3^*P_0^* = F_3P_0$ bestimmt, wo eben F_3O^* und F_3P_0 aus der Bildebene der Figur 94 zu entnehmen sind.

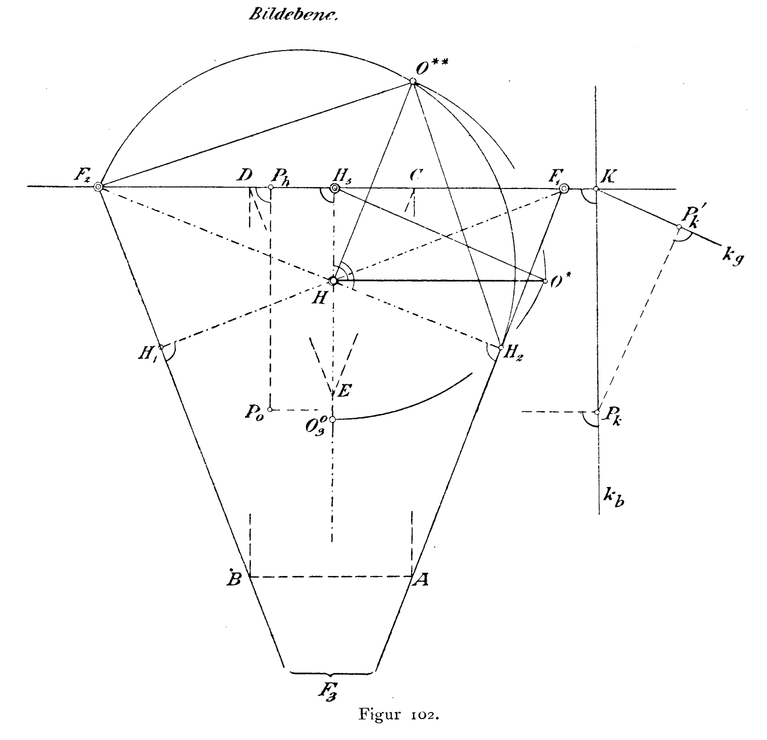
(28) Die Gerade $O_3P_0^*$ schneidet dann auf der Senkrechten in P' zu O_3P' die gesuchte Höhe $P'P^*$ des Punktes P ab.

Natürlich gilt auch:

(29) Der „Aufriß in der Ebene OF_3F_1“ und auch der „Seitenriß in der Ebene OF_2F_3“ (Fig. 100) läßt sich mit Vorteil nach derselben Methode zeichnen, die in den Sätzen (25) und (27) für den „Grundriß in der Ebene OF_1F_2“ festgelegt ist.

Zweite Methode: Eine Abänderung der soeben vorgetragenen Konstruktionen des Grund- und Aufrisses ist besonders dann wünschenswert, wenn die Neigung der Bildebene so gering ist, daß der Fluchtpunkt F_3 (Lotfluchtpunkt) etwa außerhalb des Zeichenbogens fällt, aber natürlich als Schnitt zweier Bildgeraden doch festgelegt ist. Schon die Bestimmung der ersten Orientierung ist dann gegenüber den Entwicklungen

auf p. 109f. etwas abzuändern.[1]) Die von F_1, F_2 nach F_3 laufenden Geraden wollen wir als bereits gezeichnet annehmen (Fig. 102), etwa nach einer der Methoden, wie man überhaupt nach dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden Verbindungslinien zieht.[2]) Der Hauptpunkt H ist dann als Schnitt der Höhen F_1H_1 und F_2H_2 im Fluchtpunktdreieck $F_1F_2F_3$ bestimmt. (Wenn



Figur 102.

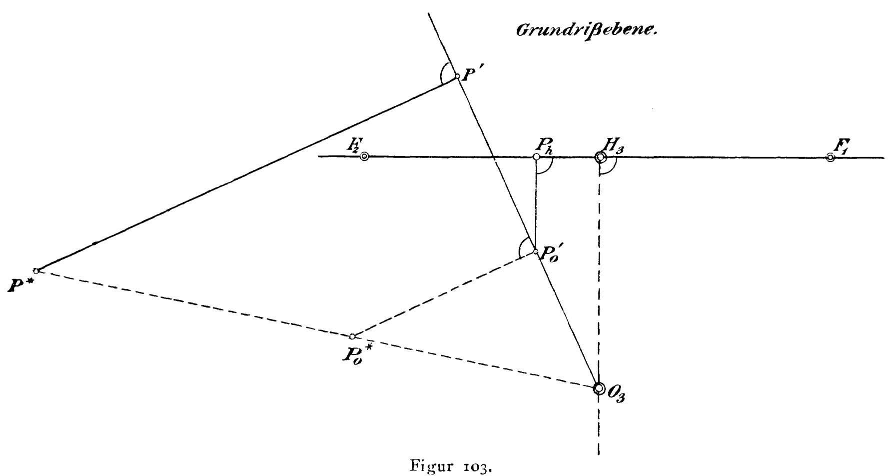
diese aber unter zu spitzen Winkeln sich schneiden, wird man besser auch die dritte Höhe F_3H_3 zu Hilfe nehmen. Man bestimmt zu dem Zwecke einen geeignet gelegenen Punkt E von ihr, indem man die Schnittpunkte A, B von F_1F_3 und F_2F_3 mit einer in hinreichend großem Abstande zu F_1F_2 gezogenen Parallelen auf F_1F_2 nach C, D projiziert und die Parallelen

1) Ist jedoch die Bildebene fast vertikal gerichtet, so ist aus dem perspektivischen Bilde allein, wie man sich leicht überzeugt, die erste Orientierung überhaupt nicht mit genügender Sicherheit zu ermitteln. Auch empfiehlt es sich dann, das Bild so umzuphotographieren, daß die neue Bildebene vertikal steht (d. h. vertikale Raumgeraden jetzt parallel werden), und das neue Bild unter Benutzung der Entwicklungen des ersten Abschnittes p. 101 ff. zur Rekonstruktion zu benutzen.

2) Vgl. z. B. die p. 27 zitierte Arbeit von Hrn. A. Witting.

durch C und D bez. zu F_1F_3 und F_2F_3, eben in E, zum Schnitt bringt, wie Fig. 102 dies zeigt.) Durch Umlegung des rechtwinkligen Dreiecks F_2H_2O um F_2H_2 nach $F_2H_2O^{**}$ findet man ferner die Distanz HO^{**} (Fig. 102), die den Punkt O^* durch $HO^{**} = HO^*$ auf der Senkrechten zu HH_3 und damit den umgelegten Augenpunkt O_3^0 auf H_3H wie früher (vgl. Fig. 94) liefert.

Das Eigenartige der folgenden abgeänderten Rekonstruktion des Grund- und Aufrisses beruht eben darin, daß sie den unzugänglichen Punkt F_3 nicht weiter benutzt.[1]) Ist nämlich P^0 wieder das Bild eines beliebigen Raumpunktes P, so liegt



Figur 103.

offenbar der Grundriß P_0' (Fig. 103) des Bildpunktes ebenfalls auf dem Strahl OP_3 (Fig. 100). Doch weil zur Bestimmung von P_3 auf F_1F_2 die Linie F_3P_3 eben nicht direkt zu zeichnen möglich ist, benutzt man zweckmäßig eine zu F_1F_2 (etwa im Punkte K der Fig. 100) senkrechte Hilfsebene, die um ihre Schnittgerade k_b mit der Bildebene in diese umgelegt sei, sodaß die Parallele k_g zu H_3O^* die umgelegte Schnittgerade mit der Grundrißebene ist (Fig. 102). Der Bildpunkt P_0 wird dann nach P_h auf den Horizont F_1F_2 und nach P_k auf k_b projiziert und letzterer Punkt nochmals nach P_k' auf k_g. Überträgt man dann P_h von der Bildebene auf die Grundrißebene (Fig. 103), so ist der Punkt P_0', der durch $P_0'P_h \perp F_1F_2$

1) Doch sei bemerkt, daß man die erste Methode dann unverändert beibehalten kann, wenn man eine „Fluchtpunktschiene“ (vgl. p. 94) anwenden will, um die Verbindungslinien nach dem Punkte F_3 zu ziehen.

und $= KP_k'$ bestimmt ist, der Grundriß des Punktes P_0 und O_3P_0' der mit O_3P_3 identische Strahl, auf dem der gesuchte Grundriß P' liegt.

Um die Höhe $P'P^*$ des Punktes P zu finden, denken wir wieder die Ebene $OP'P$ des Raumes um OP' (Fig. 100) in die Grundrißebene nach $O_3P'P^*$ umgeklappt (Fig. 103). Der Punkt P^* ist dabei jetzt bestimmt durch das Lot in P' auf O_3P' und die Gerade $O_3P_0^*$, wo $P_0^*P_0' \perp O_3P'$ und $= P_kP_k'$ (Fig. 102) ist. —

§ 4. Ausgeführte Beispiele.

Ich möchte nun Ihre Aufmerksamkeit auf die hier vorliegenden Zeichnungen lenken, die, aus der Fülle des sich darbietenden Stoffs ausgewählt, Ihnen erst recht vor Augen führen dürften, zu welch überaus interessanten Aufgaben die entwickelten Methoden der Photogrammetrie (in den einfachsten Fällen auch für den Schulunterricht) hinführen. Sie sehen auf den einzelnen Blättern jedesmal die verschiedenen Hilfskonstruktionen für die erste Orientierung, sowie in geeigneter Auswahl für einzelne Punkte des Objekts die zur Bestimmung ihrer Grundrisse und ihrer Höhen notwendigen Linien ausgezeichnet. Ich kann mich daher darauf beschränken, nur einige wenige Bemerkungen im einzelnen hinzuzufügen. Abgesehen von dem letzten Beispiel sind die Bildebenen vertikal gerichtet.

Beispiel I (Tafel I).[1]) Kupferstich von A. Dürer: Der heilige Hieronymus im Gehäuse, 1514.[2]) Wir werden später noch näher auf die Beziehung der Photogrammetrie zur Malerei eingehen und dabei ausführlich Dürers gedenken. Das Bild stellt eine Frontstellung des Zimmers und Tisches, dagegen eine Übereckstellung der schräg stehenden Bank dar. Da wir die Tischplatte und den Sitz der Bank als Rechtecke annehmen dürfen, so sind die Sätze (5), (7), (8) zur Bestimmung der ersten Orientierung zu benutzen. Mit der Genauigkeit, die

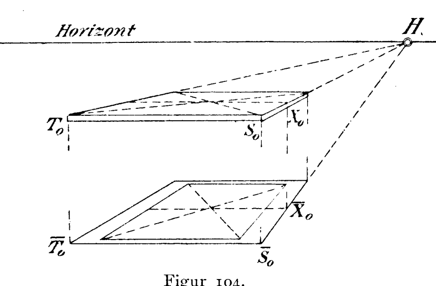
---

1) Es sei bemerkt, daß alle Tafeln die Originalzeichnungen in verkleinertem Maßstabe wiedergeben.

2) Das bei der Zeichnung benutzte Bild ist eine Photographie nach einem im Kunstwartverlage erschienenen Blatte, doch habe ich auch wohl letzteres selbst gelegentlich zur Konstruktion in meinen Übungen benutzen lassen. Wegen seiner Billigkeit (25 Pf.) kann es leicht von den Schülern angeschafft werden. Ich will erwähnen, daß im gleichen Verlage, sowie im Verlage von Fischer und Franke in Berlin („Hauptblätter der graphischen Kunst“, Preis 25 Pf.) noch andere zu gleichem Zwecke zu benutzende Bilder erschienen sind.



überhaupt das Bild gestattet, läßt sich vereinigen, daß man die Fluchtpunkte der Diagonalen der Tischplatte mit denen der Seiten des Sitzes der Bank genau zusammenfallen läßt und überdies in genau gleichem Abstande von dem Hauptpunkte wählt. Man darf daher unbedenklich annehmen, daß DÜRER wirklich gerade diese einfachste Annahme bei der Konstruktion seines Bildes benutzt hat, zumal überhaupt die „Distanzpunkte" (vgl. Satz 6 p. 103) in perspektivischen Zeichnungen der damaligen Zeit eine bevorzugte Rolle spielen. Aus dieser Annahme folgt insbesondere, daß die Tischplatte (ebenso wie die Tafel mit dem Signum) quadratisch ist. Zur Konstruktion war es notwendig, die Tischplatte gegen das von den äußeren Ecken der Beine auf dem Fußboden gebildete Rechteck zu orientieren, m. a. W. die Projektion der Tischplatte auf den Fußboden im Bilde zu besitzen (Fig. 104). Da bei dieser Projektion die zum Horizont parallele Mittellinie (Verbindungslinie der Mittelpunkte der Gegenseiten) der Tischplatte, die durch den Diagonalschnittpunkt bestimmt ist, mit der analogen Mittellinie des genannten Rechtecks zur Deckung gelangt, kann leicht dadurch die Projektion $\overline{X_0}$ des Endpunkts X_0 der Mittellinie der Tischplatte auf den Fußboden und damit die Projektion der Tischplatte selbst gefunden werden. Analoges gilt für den Sitz des Bänkchens, wobei gerade die Mittellinien in seiner Symmetrieebene zu benutzen sind. Dadurch, daß die Höhe des Tisches zu 77 cm angenommen wurde, war es möglich, einen Maßstab für die Grund- und Aufrisse hinzuzufügen.



Figur 104.

Man wird bei der Rekonstruktion des Bildes von der großen geometrischen Sorgfalt, mit der DÜRER gezeichnet hat, überrascht sein; nur die Kopfweite des an der Hinterwand hängenden Hutes erweist sich als mehrmals zu groß. Im Aufriß ist der Hut durch die beiden Kreise mit den Mittelpunkten M, N und den Durchmessern KL, PQ an der Hinterwand angedeutet, welche die innere Kopfweite und den Rand der Krämpe darstellen.

Beispiel II (Tafel II). Katholische Volksschule in

Göttingen. Die erste Orientierung wurde auf Grund des Satzes (11) konstruiert. Durch direkte Messung wurde nämlich die Länge und die Breite des Gebäudes zu 23,4 m und 16,3 m ermittelt.[1]) Die Rekonstruktion des Grund-, Auf- und Seitenrisses erfolgt dann einfach nach den Sätzen 20—23 p. 113 ff; die bekannten Längen gestatten den Maßstab der Zeichnung hinzuzufügen. Dieses Beispiel bietet insofern noch Interesse, als einfach eine Ansichtspostkarte des Gebäudes benutzt wurde, daher nennenswerte Auslagen für den Schüler bei Benutzung solcher perspektivischen Bilder überhaupt nicht in Frage kommen. Ich kann Ihnen hier, zum Teil mit den ausgeführten photogrammetrischen Zeichnungen, noch eine Reihe anderer Ansichtspostkarten von Göttinger Gebäuden vorlegen, die alle zu der gleichen Benutzung wie das obige Beispiel sich vorzüglich eignen. Sonst kann man auch geeignete käufliche Photographieen benutzen, falls man es nicht vorzieht, selbst die photographischen Aufnahmen zu machen und dann für die Schüler, vielleicht von einem unter ihnen, Kopieen herstellen zu lassen, was natürlich doch immer am besten ist.

Beispiel III (Tafel III). Nebengebäude beim geophysikalischen Institut auf dem Hainberge bei Göttingen. Bei diesem Beispiel ist sofort zu erkennen, daß die Bildebene stark geneigt ist. Der untere Endpunkt der vordersten vertikalen Kante des Gebäudes ist als Koordinatenanfang P gewählt. Die Ausführung der Zeichnung stützt sich hinsichtlich der ersten Orientierung auf den Satz 14 (p. 110), hinsichtlich der Konstruktion des Grund-, Auf- und Seitenrisses auf die Sätze 25—29 (p. 119 ff.), wobei in Betreff der Anwendung des letzten Satzes nur zu beachten bleibt, daß die Maßstäbe für die drei Risse die gleichen werden, d. h. $P'Q' = P''Q''$ und $P'S' = P'''S'''$ wird. Der um F_3F_1 sowohl wie um F_2F_3 in die Bildebene umgelegte Augenpunkt ist dort, analog dem um F_1F_2 umgelegten Augenpunkt O_3^0, bez. mit O_2^0 und O_1^0 und entsprechend der Augenpunkt in der Aufrißebene OF_3F_1 mit O_2, in der Seitenrißebene OF_2F_3 mit O_1 bezeichnet. —

1) Doch hätte man ebenso sich leicht davon überzeugen können, etwa durch Abzählen der Backsteine in einer durchlaufenden Reihe, daß die Fenster auf beiden Seiten gleich weit voneinander und dem Rande abstehen, sodaß man auf Grund dieser Tatsache gleiche horizontale Strecken auf beiden Gebäudeseiten und damit ein horizontales Quadrat kennt, was die Anwendung der Satzes 9 (p. 104) gestattet.



Auf eine interessante spezielle Aufgabengruppe möchte ich noch kurz hinweisen, für die wir später noch manche praktische Beispiele und im Anschluß daran eine einfache Konstruktionsmethode kennen lernen werden (p. 172 f. und 177). Oft wird es sich nur darum handeln, ein ebenes Objekt aus seinem perspektivischen (vertikalen oder geneigten) Bilde zu rekonstruieren; ohne daß wir schon jetzt den späteren praktischen Anwendungen vorgreifen, wollen wir etwa an die ebene Fassade eines Hauses denken, oder es sei z. B. die Aufnahme eines Gebäudes oder einer Landschaft samt der Spiegelung in einem ruhigen Wasser bei vertikaler oder geneigter Bildebene gegeben. In diesem Falle kommt also das Bild auf der ebenen Wasserfläche in Betracht, und man wird mit Vorteil auch von den Spiegelungsgesetzen bei der Bestimmung der ersten Orientierung sowohl wie der Rekonstruktion des Objekts selbst Gebrauch machen. Es gilt z. B. der besonders bei geneigter Bildebene wichtige Satz:

(30) Die Verbindungslinien der Bilder eines Objektpunktes und seiner Spiegelung gehen sämtlich durch den Lotfluchtpunkt.[1])

Ich möchte diesen Abschnitt nun mit der Bemerkung abschließen, daß naturgemäß, falls es sich um größere photogrammetrische Aufgaben handelt, z. B. um die Rekonstruktion eines komplizierten Gebäudes aus seinem photographischen Bilde, alle die mannigfachen praktischen Regeln der direkten malerischen Perspektive, welche eine Vereinfachung der Konstruktion herbeizuführen vermögen, auch umgekehrt hier wieder zweckmäßig zur Anwendung gelangen. Hierauf im einzelnen einzugehen, ist mir natürlich nicht möglich; in dieser Hinsicht möchte ich jedoch das Hilfsmittel der zentralen Kollineation und der damit im Zusammenhang stehenden projektiven Theorieen zu erwähnen nicht unterlassen. Ist es doch z. B. sehr instruktiv, die Lösung der p. 118 ff. behandelten Aufgabe oder die soeben erwähnten Aufgaben der Rekonstruktion ebener Objekte geradezu mit Hilfe der zentralen Kollineation durchzuführen.

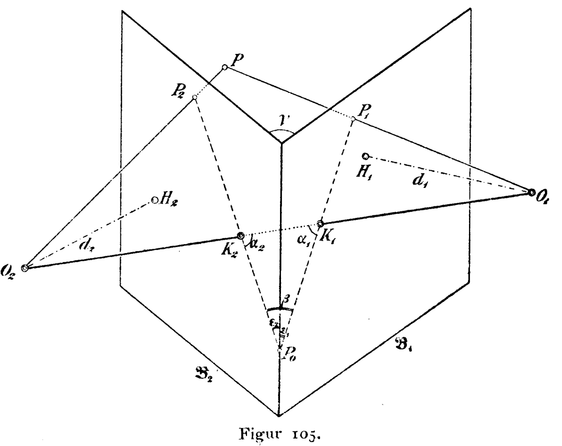
1) Vgl. auch S. FINSTERWALDER, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VI 2 (1897) p. 19 ff. (Photographieen kleiner Objekte und ihrer Spiegelbilder in zweckmäßig aufgestellten Spiegeln; Anwendung auf Kristallographie).

Zweiter Abschnitt: Erweiterung der Methoden auf zwei oder mehrere gegebene Perspektiven.

§ 5. Der allgemeine Satz von Finsterwalder und Definition der Kernpunkte und der zweiten Orientierung.

Bislang war nur ein perspektivisches Bild gegeben. Wir mußten dann, wie wir sahen, noch bestimmte geometrische Eigenschaften des Objekts kennen, damit seine Rekonstruktion möglich war. Dementsprechend kamen als Beispiele vornehmlich Perspektiven von Gebäuden in Betracht, an denen horizontale Geraden, rechte Winkel u. dgl. von vornherein erkennbar sind, oder es handelte sich überhaupt nur um die Rekonstruktion ebener Objekte. M. a. W.: Die Photogrammetrie mit Benutzung nur *einer* Perspektive erwies sich im wesentlichen als Umkehrung der perspektivischen Axonometrie (mit rechtwinkligen oder schiefwinkligen Achsen), mochte die Bildebene dabei keiner, einer oder zweien der Koordinatenachsen parallel sein.

Wir gehen nun dazu über, zwei oder mehrere perspektivische Bilder desselben Objektes von verschiedenen Zentren aus als gegeben vorauszusetzen. Im Gegensatz zu dem Obigen legen die photogrammetrischen Methoden, welche sich auf mehrere Perspektiven beziehen, bei ihrer Anwendung keinerlei geometrische Einschränkung den Objekten auf. Um unsern Betrachtungen schon jetzt einen praktischen Ausblick zu geben, können wir etwa ebensowohl an Photographieen des freien Geländes, z. B. von Gebirgslandschaften, wie an Photographieen von Gebäuden denken, deren Grundrißwinkel unbekannt sind.



Figur 105.

Es seien jetzt *zwei* Perspektiven desselben Objekts von den Zentren (Standpunkten) O_1 und O_2 aus gegeben. Die wirklichen räumlichen Verhältnisse seien durch die Figur 105 ver-

anschaulicht, welche die beiden Bildebenen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ in der (zunächst noch nicht bekannten) richtigen Lage gegeneinander und gegen das Objekt und die innere Orientierung[1]), d. h. die Hauptpunkte H_1, H_2, die Zentren O_1, O_2 und die Hauptachsen O_1H_1, O_2H_2 erkennen läßt. Die Punkte P_1 und P_2 seien die Bilder eines beliebigen Raumpunktes P.

Ehe wir unserer Betrachtung eine elementarere Wendung geben, möchte ich nicht unterlassen, doch zunächst den folgenden sehr interessanten Satz anzuführen, der von Hrn. S. Finsterwalder aufgestellt wurde[2]):

(31) Zwei Perspektiven eines beliebigen Objekts mit ihrer inneren Orientierung genügen, um das Objekt bis auf den Maßstab zu rekonstruieren.

Den Gang dieser Rekonstruktion und damit den Beweis des Satzes will ich an der Hand der obigen Figur 105 kurz andeuten. Wir finden zugleich schon hier Gelegenheit, einen überaus wichtigen, von Herrn G. Hauck in die Photogrammetrie eingeführten Begriff[3]) kennen zu lernen:

(32) Definition: Man bezeichnet jedes der Bilder K_1 und K_2, welches das eine Zentrum in seiner Bildebene von dem anderen entwirft, als den Kernpunkt der betreffenden Bildebene $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ (Fig. 105).[4])

Ihre Wichtigkeit drückt sich in folgendem leicht zu beweisenden Satze aus:

(33) Von den beiden Kernpunkten K_1 und K_2 aus werden die entsprechenden Bilder beliebiger Raumpunkte durch projektive Strahlenbüschel projiziert. Denn in der Raumfigur 105 schneiden sich je zwei entspre-

1) Nach der Definition von Hrn. S. Finsterwalder ist hier unter innerer Orientierung nur der Hauptpunkt und die Distanz verstanden (vgl. Anm. 1 p. 106).

2) S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. VI 2 (1897), p. 15 ff.

3) G. Hauck, Neue Konstruktionen der Perspektive und Photogrammetrie, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 95, p. 8, Berlin 1883.

4) Um auf die analogen Verhältnisse bei drei oder mehr Bildebenen Rücksicht zu nehmen, würde man besser die Bezeichnung K_{12} und K_{21} einführen, wo der erste Index auf die Bildebene, der zweite auf das projizierte Zentrum sich bezieht. Doch wollen wir statt dessen hier kürzer K_1 und K_2 sagen.

chende Strahlen auf der Schnittgeraden der beiden Bildebenen, wie die Strahlen $K_1 P_1$ und $K_2 P_2$ im Punkte P_0.

Die Bestimmung dieser Kernpunkte K_1 und K_2 bildet den *ersten Teil der Lösung* der durch den Satz (31) aufgestellten Aufgabe; der Kernpunkt des einen Bildes ist im allgemeinsten Falle als Schnitt zweier ebener Kurven dritter Ordnung zu finden, für die sechs gemeinsame Punkte und noch je sechs weitere Punkte bekannt sind.[1]) Der Kernpunkt des anderen Bildes ist dann als vierter Schnittpunkt zweier Kegelschnitte bestimmt, für die drei ihrer Schnittpunkte und noch je ein Punkt, sowie das Doppelverhältnis dieser vier Punkte auf jedem Kegelschnitt bekannt sind.[2])

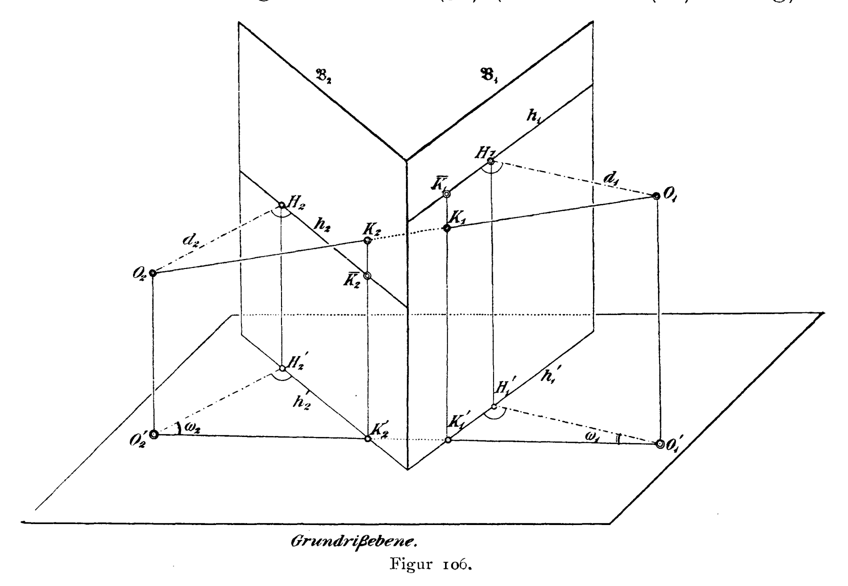
Der *zweite Teil der Lösung* verlangt, die Ebenen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ in die richtige Lage zueinander zu bringen (vgl. indes Satz 34). Schneiden sich die Strahlen $K_1 P_1$ und $K_2 P_2$ in P_0 auf der Schnittgeraden der Ebenen (Fig. 105), so sind vom Dreikant mit der Ecke P_0 der Winkel $\beta = \sphericalangle K_1 P_0 K_2$ durch die jetzt bekannten Winkel $\alpha_1 = \sphericalangle K_2 K_1 P_0$ und $\alpha_2 = \sphericalangle K_1 K_2 P_0$ und außerdem die Neigungswinkel der Ebene $P_0 K_1 K_2$ gegen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ bestimmt, folglich sind auch der Neigungswinkel ν der Ebenen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ gegeneinander und die Winkel ε_1 und ε_2 zwischen der Schnittgeraden der Bildebenen und $P_0 K_1$ bez. $P_0 K_2$ zu finden. Sind aber erst die Bildebenen in die richtige Lage gegeneinander gebracht, so ergibt sich die Rekonstruktion des Objektes selbst sofort dadurch, daß man die Strahlen von den Augenpunkten nach den entsprechenden Bildpunkten paarweise zum Schnitt bringt. —

Wir denken jetzt von dem Punkt O_1 aus auf die ganze Fig. 105 samt dem Objekte mit Ausnahme der Ebene $\mathfrak{B}_1$ eine Ähnlichkeitstransformation ausgeübt, wobei $\mathfrak{B}_2$ und O_2 in $(\mathfrak{B}_2)$ und $\overline{O_2}$ übergehen, darauf von $\overline{O_2}$ allein auf die Ebene $(\mathfrak{B}_2)$ eine solche Ähnlichkeitstransformation, daß die Größe der früheren Distanz

1) Des Näheren vgl. S. FINSTERWALDER, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, p. 8 Nr. 5 und p. 10 Nr. 8, sowie R. STURM, Das Problem der Projektivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades, Mathematische Annalen Bd. I, p. 533—575, Leipzig 1869.

2) S. FINSTERWALDER, Die geometr. Grundl. der Photogr., p. 22 Nr. 20 („Problem der fünf Punkte", zuerst gelöst von H. MÜLLER in Freiburg, in die Photogrammetrie eingeführt von J. STEINER in Prag in seinem Werke: Die Photogrammetrie im Dienste des Ingenieurs, ein Lehrbuch der Photogrammetrie, Wien 1893, p. 24).

$O_2 H_2$ für die neue Lage $\mathfrak{B}_2$ wieder hergestellt wird. Man erkennt dann, daß hierdurch die beiden Bildebenen mit ihrer unveränderten ersten Orientierung in eine solche neue Lage zueinander gebracht sind, in der die entsprechenden Strahlen bez. von O_1 und O_2 nach je zwei zugehörigen Punkten, wie nach P_1 und P_2, sich nach wie vor schneiden, und daß das neue so rekonstruierte Objekt zu dem alten ähnlich ist. Hieraus folgt auch ohne Voraussetzung des Satzes (31) (dem Satze (20) analog):



Figur 106.

(34) Sind zwei Perspektiven eines Objekts samt ihrer ersten Orientierung gegeben, so gestattet dies allein höchstens die *ähnliche* Gestalt des Objekts zu rekonstruieren; dessen wahre Größe wird dann erst durch die Kenntnis der wahren Länge einer einzigen Strecke des Objekts oder auch der wahren Entfernung $O_1 O_2$ der Standpunkte bestimmt. Wir können daher, da wir ohnehin gewöhnlich im verkleinerten Maßstabe zeichnen, die Länge der Strecke $O_1 O_2$ (oder ihrer Projektion) auf dem Zeichenblatt willkürlich wählen; die bekannte Länge irgend einer Strecke bestimmt dann wieder den Maßstab unserer Zeichnung.

Wir beschränken uns nun in der folgenden Betrachtung durchaus auf *vertikale* Bilder. Die Höhen der beiden Standpunkte O_1 und O_2 über einer zu den beiden Bildebenen senkrechten Grundrißebene können jedoch verschieden sein

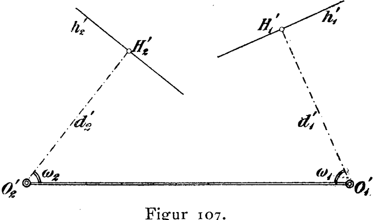
(Fig. 106).[1]) Da für die Bestimmung der ersten Orientierung jedes einzelnen Bildes allein in Betracht kommt, was wir schon früher, insbesondere in den Sätzen 15—19 (p. 111 ff.), entwickelt haben, so wollen wir jene sogleich als ausgeführt voraussetzen. Ferner wollen wir von der (für unsern Zweck spezialisierten) Definition Gebrauch machen:

(35) Unter der „*zweiten Orientierung*" zweier oder mehrerer *vertikaler* Bilder gegeneinander verstehen wir die Elemente, welche die Grundrisse der Standpunkte O_i und der Hauptachsen $O_i H_i$ der einzelnen Bilder in einer zu ihnen senkrechten Grundrißebene bis auf den Maßstab gegeneinander festlegen.[2])

Die zweite Orientierung gestattet also auch nur eine ähnliche Figur dieses Grundrisses zu zeichnen, dessen Maßstab in Übereinstimmung mit dem Satze (34) erst bestimmt wird, wenn noch eine Strecke der wahren Länge nach bekannt ist.

(36) Die zweite Orientierung ist für zwei vertikale Bilder gegeben durch die Horizontalwinkel[3]) ω_1 und ω_2 zwischen der Hauptachse jedes einzelnen Standpunktes und der „Standlinie", d. h. der Verbindungslinie $O_1 O_2$ der beiden Standpunkte.

Es ist unmittelbar zu erkennen, wie aus ω_1, ω_2, und den bekannten Elementen der ersten Orientierung dann der nebenstehende Grundriß zu zeichnen ist (Fig. 107).



Figur 107.

§ 6. Vier Methoden zur Bestimmung der zweiten Orientierung.

Die Aufgabe, aus zwei mit erster Orientierung gegebenen Perspektiven in einfacherer Weise als nach der p. 129 angegebenen Lösung das Objekt zu rekonstruieren, zerfällt nun in folgende beiden Teile:

1. in die Bestimmung der *zweiten* Orientierung,

1) Sind im besonderen diese Höhen gleich, so wird man die Grundrißebene natürlich bequem durch die beiden Standpunkte selbst hindurchlegen.

2) Vgl. Anm. 1 p. 100. Die Orientierung gegen die Meridianrichtung, welche zur „äußeren Orientierung" des Hrn. FINSTERWALDER gehört, ist also nicht einbegriffen.

3) Wegen des Begriffs „Horizontalwinkel" vgl. Satz (19) p. 112.

2. in die Rekonstruktion des Grund- und Aufrisses des Objektes.

Was zunächst die Bestimmung der zweiten Orientierung betrifft, so wollen wir vier verschiedene Methoden kennen lernen, um die dazu nötigen Elemente ω_1 und ω_2 zu erhalten.

a) Es seien von jedem der beiden Standpunkte aus die Horizontalwinkel ω_1 und ω_2 direkt gemessen. Hierzu mag man entweder einen Theodoliten zu Hilfe nehmen, nachdem man den gegnerischen Standpunkt jedesmal durch ein Signal (eine Bake) markiert und sich außerdem einen deutlich sichtbaren Punkt des Objekts gemerkt hat, der bei der photographischen Aufnahme in der Hauptvertikalebene, d. h. der vertikalen Ebene durch die Hauptachse, liegt, sich also in der etwa durch einen feinen Strich auf der Mattscheibe angegebenen Hauptvertikalen abbildet. Oder aber der photographische Apparat selbst besitzt Einrichtungen zu einer solchen Winkelmessung (Phototheodolit, vgl. p. 180).

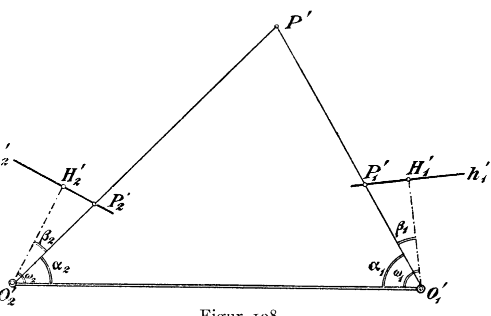
b) Es sei möglich, von jedem Standpunkte aus den andern oder doch die durch ihn gelegte vertikale Gerade, die wieder durch ein Signal markiert ist, zugleich mitzuphotographieren (Fig. 106).[1]) Ist dann $\overline{K}_1$ bez. $\overline{K}_2$ der Schnittpunkt des Bildes der einzelnen Vertikalgeraden mit dem zugehörigen Horizont in der Bildebene $\mathfrak{B}_1$ bez. $\mathfrak{B}_2$ (also auch die Projektion bez. des Kernpunktes K_1 und K_2 auf den betreffenden Horizont), so sind die leicht zu konstruierenden Winkel $\overline{K}_1 O_1 H_1 = \overline{K}_1' O_1' H_1'$ und $\overline{K}_2 O_2 H_2 = \overline{K}_2' O_2' H_2'$ mit den soeben eingeführten Winkeln ω_1 und ω_2 identisch. Diese Methode hat den Vorzug, daß überhaupt keine Winkel zu messen sind, also auch die Anwendung des Transporteurs nicht nötig ist.

Zusatz. Würde es nicht möglich oder zweckmäßig sein, von dem einen Standpunkte, etwa O_1, aus den gegnerischen Standpunkt O_2 zugleich mit dem Objekte selbst auf dieselbe Platte zu bringen, so kann man neben der Hauptaufnahme des Objektes noch eine Hilfsaufnahme von demselben Standpunkte O_1 aus machen, welche den Standpunkt O_2 und einen Teil der Hauptaufnahme enthält (von dieser wieder vertikalen Hilfs-

1) Für die Figur 106 gilt das oben (p. 100 f.) Gesagte, daß die gezeichneten Bildebenen die in Bezug auf die zugehörigen Zentren symmetrischen Lagen der Mattscheibe bei den photographischen Aufnahmen darstellen.

aufnahme sei die erste Orientierung natürlich auch bekannt). Wir wollen die Bildebene der Hilfsaufnahme mit $\mathfrak{B}_3$, ihren Horizont mit h_3, das auf Grund der ersten Orientierung gegen $\mathfrak{B}_3$ festgelegte Zentrum, das im Raume mit O_1 zusammenfällt, mit O_3 und den Schnittpunkt von h_3 und dem Bilde der durch O_2 gehenden vertikalen Geraden mit $\overline{K}_3$ bezeichnen. Sind P_1 und P_3 die deutlich sichtbaren Bilder desselben Raumpunktes P (Turmspitze, Punkt einer Gebäudekante, Bergspitze) in den Ebenen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_3$, $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_3$ ihre Projektionen auf die Horizonte h_1 und h_3, so ist die Summe der Winkel $\alpha_1 = \measuredangle \overline{P}_3 O_3 \overline{K}_3$ und $\beta = \measuredangle \overline{P}_1 O_1 \overline{H}_1$ wieder der gesuchte Winkel ω_1, wobei ev. die Vorzeichen der Winkel zu beachten sind. Wie die graphische Bestimmung der beiden genannten Winkel und damit die von ω_1 auszuführen ist, brauche ich kaum zu erwähnen.

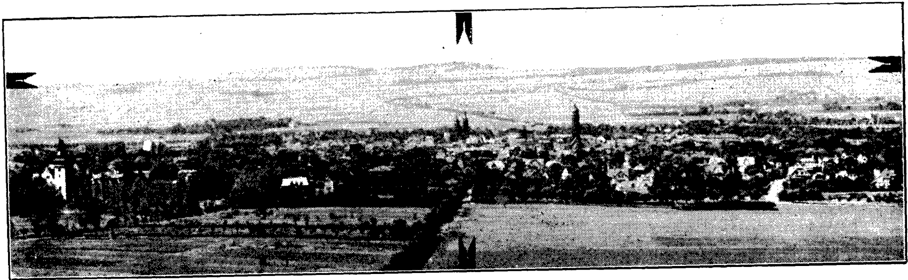
c) Was nach diesem Zusatz die Benutzung von Hilfsaufnahmen ermöglicht, wird in analoger Weise erreicht, wenn man auf einem vorliegenden Grundrißplan die Lagen O_1' und O_2' der beiden Standpunkte und den Grundriß P' eines solchen Objektpunktes P besitzt, dessen Bilder auf den beiden photographischen Platten deutlich sichtbar sind. Sind P_1 und P_2 die Bildpunkte von P, $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_2$ ihre Projektionen auf den jedesmaligen Horizont und P_1', P_2' ihre Grundrisse (Fig. 108), so ist die algebraische Summe der (ev. mit verschiedenen Vorzeichen zu nehmenden) Winkel $\alpha_1 = \measuredangle O_2' O_1' P'$ und $\beta_1 = \measuredangle P_1' O_1' H_1' = \measuredangle \overline{P}_1 O_1 H_1$ der gesuchte Winkel ω_1, wo der erste Winkel α_1 aus dem vorgegebenen Grundrißplan, der zweite β_1 aus der ersten Aufnahme sich ergibt. Analoges gilt für den Winkel $\omega_2 = \alpha_2 + \beta_2$. Diese Methode empfiehlt sich besonders dann, wenn der eine Standpunkt vom anderen aus überhaupt nicht sichtbar ist.



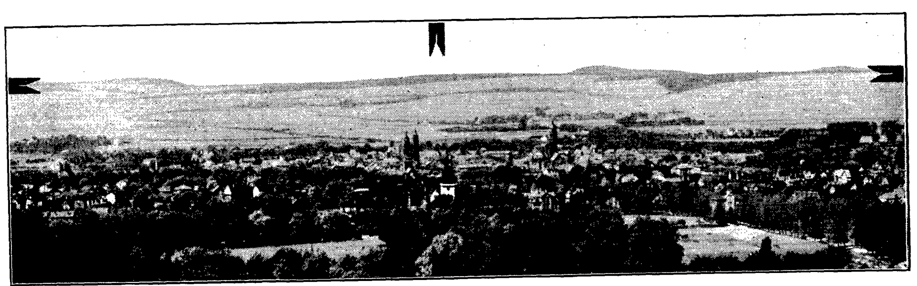
Figur 108.

d) Endlich wird man folgende Modifikation der vorigen Methode benutzen können. Man kann eben in analoger Weise, wie nach der ersten Methode unmittelbar die Winkel ω_1 und ω_2 gemessen wurden, die soeben benutzten Horizontalwinkel

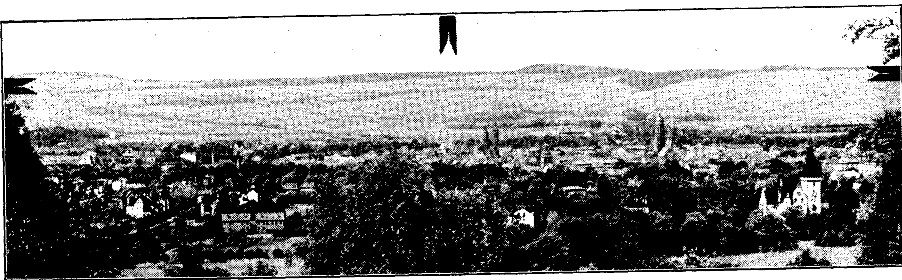
$\alpha_1 = \sphericalangle O_2'O_1'P'$ und $\alpha_2 = \sphericalangle O_1'O_2'P'$, welche je in dem einzelnen Standpunkte die Richtungen nach einem auf beiden Photographieen abgebildeten Raumpunkte P und nach dem anderen Standpunkte bilden, ebenfalls durch geodätische Messungen bestimmen, entweder indem man sie unmittelbar mit einem



Figur 109a. Göttingen. Erste Aufnahme: vom Rohns.



Figur 109b. Göttingen. Zweite Aufnahme: vom Pavillon.

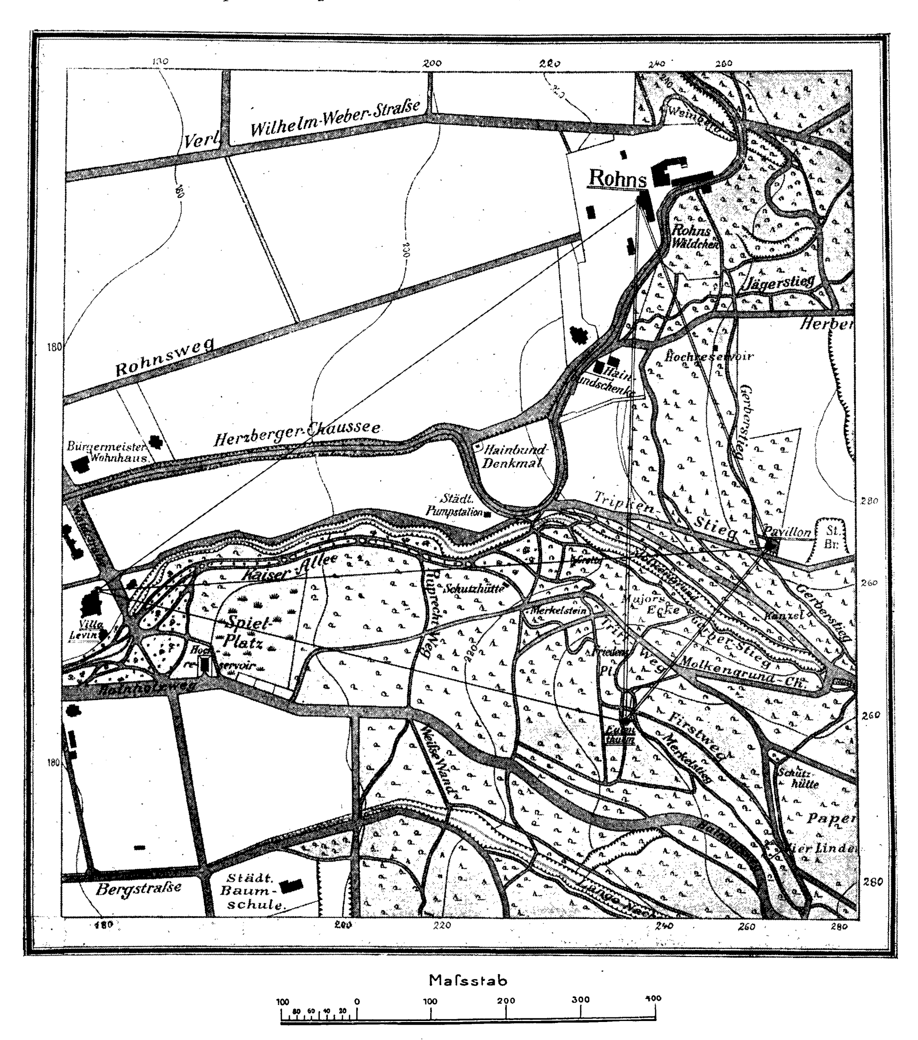


Figur 109c. Göttingen. Dritte Aufnahme: vom Eulenturm.

Theodoliten oder der ihn ersetzenden Einrichtung des photographischen Apparates direkt mißt oder, falls der eine Standpunkt vom anderen nicht sichtbar ist, indem man etwa vom Punkte P aus und einem geeigneten Hilfspunkte Q jedesmal die Horizontalwinkel zwischen den beiden Standpunkten und dem Punkte Q bezw. P mißt und daraus durch Zeichnung oder

Rechnung die Winkel α_1 und α_2 findet. Diese Winkel α_1 und α_2 werden dann genau wie vorhin zur Bestimmung der Winkel ω_1 und ω_2 benutzt.

Wie man sieht, genügt es, für einen einzigen Raumpunkt P die Winkel α_1 und α_2 zu bestimmen; doch ist es einleuchtend,



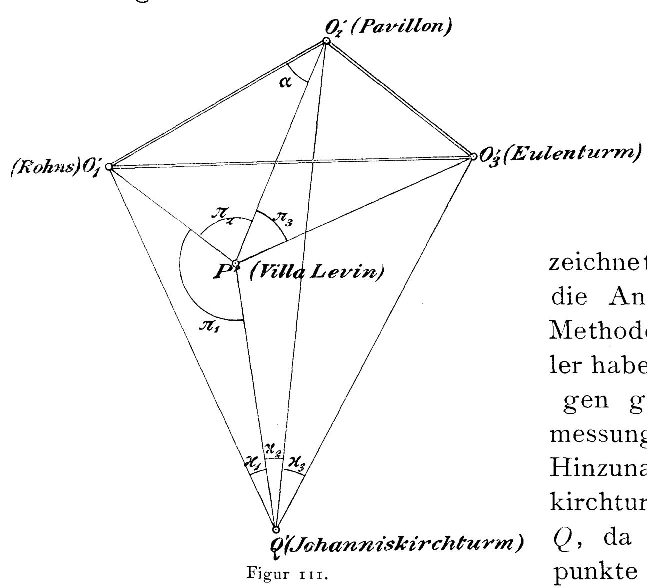
Figur 110. Hainberganlagen bei Göttingen.
(Die Höhenkurven geben die Höhen über Normal-Null in Metern an.)

daß man der größeren Genauigkeit wegen ev. mehrere Raumpunkte und ihre Bilder in der angegebenen Weise benutzen wird, daß man überhaupt die einzelne Methode wiederholt oder auch

Kombinationen von ihnen zweckmäßig anwendet, um eben die Winkel ω_1 und ω_2 möglichst genau festzulegen.

Ein Beispiel für die vierte Methode und zwar in der Verallgemeinerung, daß von drei Standpunkten aus Aufnahmen gemacht sind, geben die mit erster Orientierung (Distanzen $d_1 = d_2 = d_3 = 25{,}6$ mm) versehenen Photographieen der Stadt Göttingen und ihrer Umgebung, welche von der Plattform O_1 des „Rohns", vom „Pavillon" O_2 und vom „Eulenturm" O_3 aus aufgenommen wurden und im Vordergrunde die „Villa Levin" P zeigen (Fig. 109a, b, c).

Auf dem käuflichen Plane der „Hainberganlagen", von dem Figur 110 den hier in Betracht kommenden Teil wiedergibt, ist zwar die Lage der drei Standpunkte O_1, O_2, O_3 und der Villa Levin P gegeneinander deutlich zu erkennen; doch da der Plan zu ungenau gezeichnet ist, gestattet er nicht die Anwendung der dritten Methode. Einige meiner Schüler haben daher die notwendigen geodätischen Winkelmessungen ausgeführt unter Hinzunahme des „Johanniskirchturmes" als Hilfspunktes Q, da die einzelnen Standpunkte nicht sämtlich voneinander sichtbar waren. Es ergaben sich folgende Werte für die in der schematischen Figur 111 bezeichneten Winkel:



Figur 111.

$$\pi_1 = 151^\circ\, 40{,}4', \quad \varkappa_1 = 12^\circ\ \ 4{,}5',$$
$$\pi_2 = \ \ 30^\circ\, 58{,}4', \quad \varkappa_2 = \ \ 1^\circ\ \ 8{,}0', \qquad \text{und } \alpha = 78^\circ\, 34{,}5'.$$
$$\pi_3 = \ \ 18^\circ\ \ 1{,}4', \quad \varkappa_3 = \ \ 6^\circ\, 38{,}0',$$

(Der Winkel α war noch zu messen notwendig, da die drei Punkte O_2', P', Q' nahezu in einer Geraden liegen.) Diese Winkel gestatten, den Grundriß der vier Punkte O_1, O_2, O_3 und P genau zu zeichnen und unter Benutzung der aus den drei Photographieen zu entnehmenden Winkel $\beta_i = \sphericalangle P' O_i' H_i'$ $(i = 1, 2, 3)$ die Grund-

risse der drei Horizonte hinzuzufügen. Wie wir sogleich noch allgemein besprechen werden, vermag man dann den Grundriß der auf beiden Photographieen sichtbaren Gebäude (Türme der Kirchen, Schornsteine usw.), Bergspitzen und anderer bemerkenswerter Punkte zu zeichnen, sowie deren Höhen über der gewählten Grundrißebene und ebenso die Höhen der drei Standpunkte im Maßstabe der Zeichnung zu bestimmen.

Ich möchte noch besonders hervorheben, wie solche Beispiele in vorzüglicher Weise die Methoden der Geodäsie und darstellenden Geometrie miteinander verknüpfen und damit gerade für den Unterricht in der angewandten Mathematik an den Universitäten die wünschenswerte innige Beziehung beider Gebiete aufeinander vermitteln.

§ 7. Rekonstruktion des Grund- und Aufrisses des Objektes.

Ist nun die zweite Orientierung bestimmt und mit Hilfe der ersten und der zweiten Orientierung die Figur des Grundrisses für die Standpunkte und die Horizonte in ihrer gegenseitigen Lage gezeichnet (Fig. 107), so ist die Rekonstruktion vom Grund- und Aufriß des Objektes selbst, soweit dieses in den beiden Bildern vorhanden ist, sogar einfacher als in dem früheren Falle, wo nur eine Perspektive gegeben war. Hierbei bedienen wir uns stets folgender Bezeichnung, wie wir nochmals hervorheben wollen: Die beiden Bilder eines Raumpunktes X seien mit X_1, X_2, ihre Projektionen auf die Horizonte mit $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, ihre Grundrißprojektionen mit X_1', X_2' und der Grundriß des Raumpunktes selbst mit X' bezeichnet. Es gilt dann sogleich:

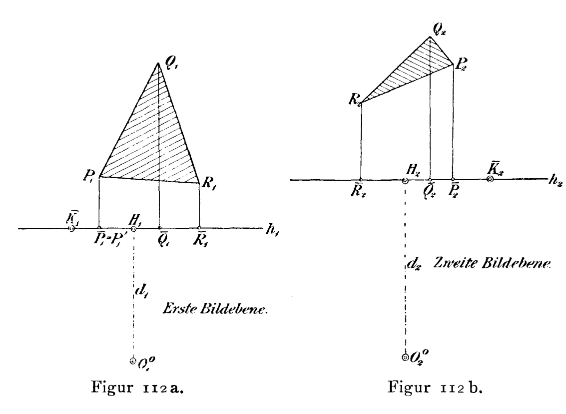
(37) Der Grundriß X' eines beliebigen Objektpunktes X ist der Schnittpunkt der beiden „Grundrißstrahlen", welche bezw. die Grundrisse O_1' und O_2' der Standpunkte mit den auf den Horizontgrundrissen gelegenen Grundrissen X_1' und X_2' der zugehörigen Bildpunkte X_1 und X_2 verbinden.[1])

Um diesem Satze gemäß nun die Konstruktion für die einzelnen Raumpunkte auf dem Zeichenblatt auszuführen, wollen wir wieder die beiden Bildebenen und die Grundrißebene neben-

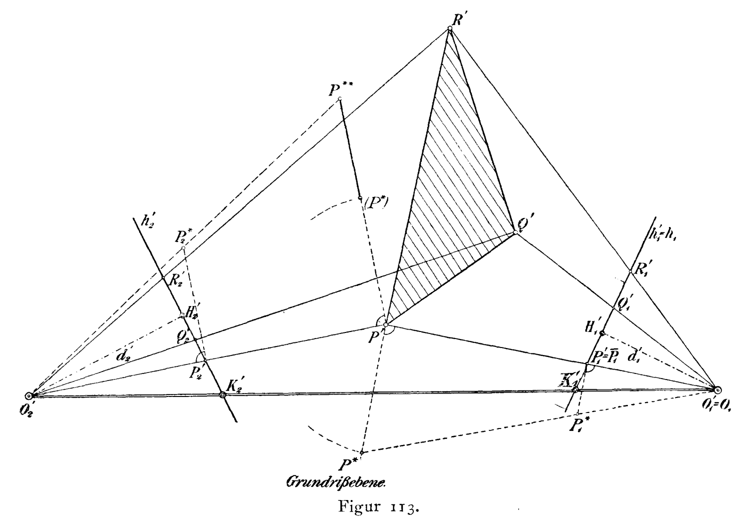
1) Wer mit den Methoden der niederen Geodäsie vertraut ist, wird leicht erkennen, daß dieser Satz ganz dem dort benutzten Prinzip des Vorwärtseinschneidens entspricht.



einander gelegt denken, den einzelnen Standpunkt aber hierbei um den Horizont in die zugehörige Bildebene bez. nach O_1^0 und O_2^0 umlegen. Wie früher ist es natürlich nötig, die einzelnen Punkte des Horizontes der einen und der anderen Bildebene auf den Grundriß desselben Horizontes in der Grundrißebene zu übertragen. Unsere Methode sei noch durch das in den Figuren 112 a, b und 113 ausgeführte Beispiel veranschaulicht, aus zwei samt ihrer ersten Orientierung gegebenen Perspektiven eines im Raum gelegenen Dreiecks PQR, welche auch die Projektionen $\overline{K}_1$ und $\overline{K}_2$ der Kernpunkte K_1 und K_2 auf den jedesmaligen Horizont enthalten, den Grundriß des Dreiecks zu rekonstruieren.



Figur 112 a. Figur 112 b.



Figur 113.

Die Grundrißebene sei im besonderen durch das Zentrum O_1 gelegt, sodaß O_1, O_1' und für einen beliebigen Bildpunkt X_1 seine Projektionen $\overline{X}_1$, X_1' zusammenfallen. Die Strecke $O_1'O_2'$ ist mit dem Satze (34) p. 130 entsprechend willkürlich gewählt.

Was ferner die Bestimmung der Höhe des einzelnen Punktes über der Grundrißebene betrifft, so ist die Methode im wesentlichen genau die gleiche, wie wir sie früher bei einer einzigen gegebenen Photographie kennen lernten (p. 115). Nun ist zunächst zu beachten, daß wir, um die Grundrißebene völlig festzulegen, ihre Schnittlinie g_i ($i = 1$ oder 2) mit einer der Bildebenen noch willkürlich wählen können. Wie wir sogleich im einzelnen an dem Beispiel noch näher ausführen werden, läßt sich, abgesehen von dem ersten Punkte, die Höhe jedes (in beiden Bildern sichtbaren) Punktes doppelt bestimmen, je nachdem man die eine oder die andere Perspektive benutzt. Hiermit ist zugleich eine ausgedehnte Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung gegeben, die besonders dann wünschenswert ist, wenn etwa identische Punkte der beiden Photographieen nur angenähert zu ermitteln sind, wie dies z. B. oft bei Aufnahmen von zerklüftetem Felsgestein im Gebirge der Fall sein wird. Die Höhenbestimmung der ersten Punkte dagegen liefert die Höhendifferenz der Standpunkte im Maßstabe der Zeichnung, wodurch nun auch die Schnittlinie der Grundrißebene mit der anderen Bildebene bestimmt ist.

In unserem Beispiel[1]) wurde als Spur g_1 der Grundrißebene in der ersten Bildebene, wie wir schon anführten, der Horizont h_1 selbst gewählt. Die z. B. aus dem ersten Bilde zu ermittelnde Höhe des Punktes P unseres Beispiels über seinem Grundriß P' (Fig. 113) ergibt sich dann durch Umlegung des rechtwinkligen Dreiecks $O_1P'P$ um seine Grundlinie O_1P' in die Grundrißebene nach $O_1P'P^*$; P^* ist dabei der Schnitt des Lotes in P' zu O_1P' und des Strahles $O_1P_1^*$, wo P_1^* auf dem Lote in P_1' zu O_1P' liegt und $P_1'P_1^*$, die Höhe des Bildpunktes P_1 über der ersten Horizont- oder der Grundrißebene, gleich der Strecke $\overline{P}_1P_1$ in der ersten Bildebene (Fig. 112a) zu wählen ist.

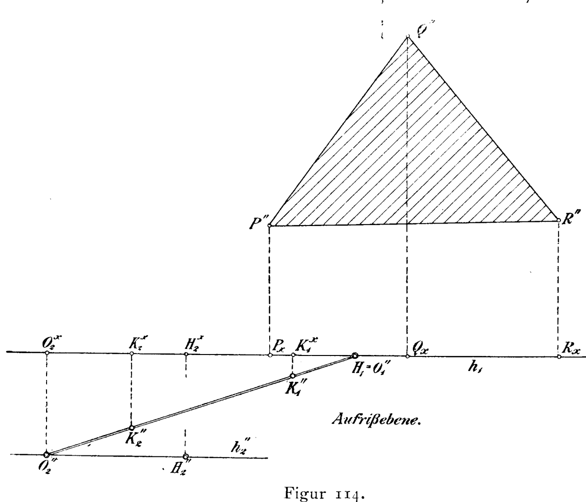
Ganz analog wollen wir das rechtwinklige Dreieck, dessen Ecken die Punkte O_2, P und die Projektion $\overline{P}_2$ von P auf die zweite Horizontebene bilden, um seine horizontale Kathete in die genannte Ebene umgelegt und dann in die Grundrißebene nach $O_2'P^{**}P'$ projiziert denken. Der Punkt P^{**} ist wieder

1) Eine einfache Überlegung an der Hand der folgenden Ausführungen des Textes zeigt, daß die Stücke der Figuren 112a, b keineswegs sämtlich willkürlich zu wählen sind (vgl. Satz (31) p. 128); wir werden daher annehmen, daß die Figuren 112a, b etwa aus zwei photographischen Aufnahmen entnommen sind.



der Schnitt des Lotes in P' zu $O_2'P'$ und des Strahles $O_2'P_2^*$, wo P_2^* auf dem Lote in P_2' zu $O_2'P'$ liegt und $P_2'P_2^*$, die Höhe des Bildpunktes P_2 über der zweiten Horizontebene, gleich der Strecke $\overline{P}_2 P_2$ der zweiten Bildebene (Fig. 112b) zu wählen ist.

Die Differenz $(P^*)P^{**}$ (Fig. 113) der gefundenen Höhen $P'P^*$ und $P'P^{**}$ über den beiden Horizontebenen stellt dann die — hier negative — Höhe des Standpunktes O_2 über der Grundrißebene, d. h. die Höhendifferenz der beiden Standpunkte O_1, O_2 dar. (Natürlich kann man jetzt auch die Kernpunkte K_1 und K_2 selbst leicht in den Bildebenen konstruieren.) Ebenso sind, wie in der Figur 113 nicht ausgezeichnet wurde, die Höhen der Punkte Q und R über der ersten Horizontebene (Grundrißebene), und zur Kontrolle, wenn man will, auch über der zweiten Horizontebene zu bestimmen. Die Figur 114 stellt dann den Aufriß in der mit der ersten Bildebene zusammenfallenden Aufrißebene dar und ist mit Hilfe der konstruierten Höhen der drei Eckpunkte des Dreiecks und der Höhendifferenz der Standpunkte gezeichnet.

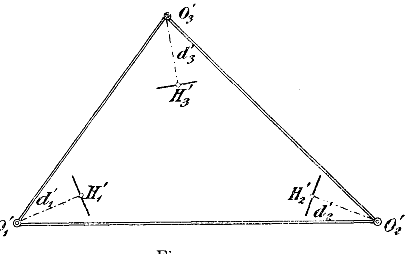


Figur 114.

In Beziehung zu dem Satze (34) sei des besonderen Interesses wegen noch hervorgehoben, daß auch die wahre Höhendifferenz der beiden Standpunkte, wenn sie — etwa durch barometrische Messung — bekannt ist, den Maßstab festlegt, daß sie aber andererseits ebenso wie die horizontale Entfernung $O_1'O_2'$ bestimmt ist, wenn man die Länge irgend einer Strecke des Objektes kennt. —

Oft wird es wünschenswert oder geradezu geboten sein, noch mehr als zwei Perspektiven zur Rekonstruktion des Objektes zu verwenden, sei es, daß mit zwei Perspektiven allein — wie z. B. bei einem nicht symmetrischen Gebäude — nicht alle Seiten des Objektes genügend zur Darstellung kommen,

sei es, daß bei Benutzung nur zweier Perspektiven manche der durch beide dargestellten Punkte sich nur sehr ungenau, etwa durch einen schleifenden Schnitt der beiden Grundrißstrahlen, konstruieren ließen. Doch kommen bei mehr als zwei (vertikalen) Perspektiven wesentlich neue Methoden nicht in Betracht. Wieder muß zunächst die erste Orientierung aller Bilder bekannt sein; die zweite Orientierung umfaßt die Bestimmung des sogenannten „Standpunktpolygons", d. h. des aus Dreiecken sich zusammensetzenden Polygons, welches durch Verbindung der Standpunktgrundrisse entsteht, und der hinzukommenden Lagen der Hauptachsengrundrisse $O_i' H_i'$ (Fig. 115). Ohne dies im einzelnen auszuführen, wollen wir nur wiederholt auf die nahe Beziehung zur Geodäsie hinweisen, insbesondere auf die dort entwickelten Methoden, wie man Dreiecksnetze durch Winkelmessungen festlegt, unter Umständen etwa von einzelnen bereits in ihrer gegenseitigen Lage bekannten Punkten eines Situationsplanes ausgehend.



Figur 115.

(38) Der Grundriß eines Objektpunktes ist dann auf so vielen Grundrißstrahlen gelegen, wie der Punkt überhaupt auf den einzelnen Perspektiven erscheint, und seine Höhe über der Grundrißebene läßt sich ebenso viele Male bestimmen, abgesehen von dem ersten Punkte, der dafür die Höhendifferenzen der einzelnen Standpunkte gegeneinander liefert.

Ich möchte schließlich noch die Apparate erwähnen, welche die Rekonstruktion des Grund- und Aufrisses aus zwei Perspektiven mechanisch ermöglichen, wenn ich auch nicht im einzelnen hierauf eingehen kann. Ein solcher Apparat ist 1884 von Herrn Architekten H. Ritter in Frankfurt a. M. ausgeführt[1]); er leistet die verlangte Rekonstruktion jedoch nur für ebene Objekte oder beliebig viele ebene Schnitte

1) H. Ritter, Perspektograph, Apparat zur mechanischen Herstellung der Perspektive aus geometrischen Figuren sowie umgekehrt der Originalfiguren aus perspektivischen Bildern, Frankfurt a. M., 1. Aufl. 1884 (vgl. auch Deutsche Bauzeitung und Centralblatt der Bauverwaltung, Jahrg. 1884).

eines Objektes. In demselben Jahre hat Herr G. HAUCK einen (schon 1883 konstruierten) Apparat veröffentlicht, der von Herrn E. BRAUER verbessert wurde.[1]) Dieser Apparat gestattet aus dem Grund- und Aufriß beliebiger räumlicher Objekte die perspektivische Ansicht mechanisch zu konstruieren; die ihm zugrunde liegenden Gedanken lassen jedoch unmittelbar auch die Konstruktion für die umgekehrte Aufgabe zu, aus zwei Perspektiven den Grundriß (oder Aufriß) zu rekonstruieren, wie Herr FR. SCHIFFNER[2]) näher angegeben hat. Herr E. BRAUER hat dann später noch eine einfachere Konstruktion angegeben, welche jedoch weniger mechanisch arbeitet.[3])

§ 8. Ausgeführte Beispiele.

Beispiel IV (Tafel IV). Theater in Göttingen, von *zwei* Standpunkten aus aufgenommen. Die erste Orientierung der beiden Bilder wurde nach den Sätzen (15) und (16) p. 111 gegeben; die beim Photographieren abgelesenen Distanzen $O_1 H_1$ und $O_2 H_2$ betrugen 150,2 mm und 150,5 mm. Für die Bestimmung der zweiten Orientierung kam die zweite Methode (p. 132) zur Anwendung. Die durch Baken markierten Vertikalen der Standpunkte sind in den Photographieen senkrecht über oder unter den Punkten $\overline{K_1}$ und $\overline{K_2}$ als kleine Striche zu erkennen. Die Grundrißebene ist wieder einfach durch das Zentrum O_1 gelegt. (In der ausgeführten Zeichnung ist indes der Übersichtlichkeit der Figur zuliebe die doppelte Größe der Distanzen für den Grundriß benutzt, und dementsprechend sind die hierher von den Bildebenen übertragenen Abstände der einzelnen Punkte $\overline{X_i}$ der beiden Horizonte h_i von den Hauptpunkten H_i ebenfalls verdoppelt.) Die Konstruktion der drei Risse des

1) G. HAUCK, Mein perspektivischer Apparat, Festschrift der Kgl. Technischen Hochschule in Berlin 1884, sowie „Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin" 1883, Nr. 8.

E. BRAUER, Hauck-Brauers Perspektivzeichenapparat, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Bd. XXXV, p. 782 (1891).

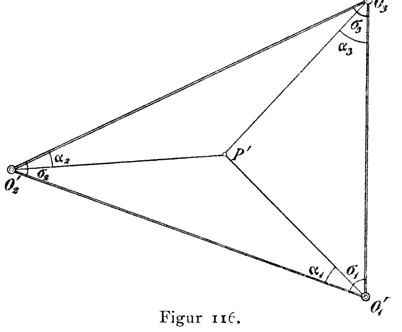
Eine Beschreibung der Apparate von RITTER und HAUCK gibt auch W. DYCK, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892, p. 234—243. Auch von PIETRO FIORINI ist ein Perspektograph konstruiert worden, vgl. DYCK, l. c. p. 243.

2) FR. SCHIFFNER, Die photographische Meßkunst oder Photogrammetrie, Bildmeßkunst, Phototopographie, Halle a. S. 1892, p. 108.

3) Vgl. E. BRAUER, Perspektiv-Reißer, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XLIII, p. 163, Leipzig 1898.

Gebäudes erfolgte dann ohne weiteres nach den im vorigen Paragraphen entwickelten Methoden, nur wurde noch die Symmetrie des Gebäudes zur vollständigen Zeichnung benutzt. Eine Höhenbestimmung, nämlich die des Punktes A der einen Gebäudekante, ist in der Grundrißebene doppelt ausgeführt, woraus die Höhendifferenz der beiden Standpunkte (im Maßstabe der Zeichnung) sich ergibt, wie p. 139 f. angegeben wurde.[1]) Da überdies die vordere Breite des Gebäudes zu 22 m gemessen war, konnte der Maßstab für die Zeichnung der drei Risse hinzugefügt werden. Aus ihm ergibt sich die wahre Länge jeder anderen Strecke; beispielsweise findet sich die Höhe der vorderen Giebelspitze über dem Boden des Gebäudes zu 17,1 m und die wahre Höhendifferenz der beiden Standpunkte (d. h. der Zentren) zu 4,8 m (wobei indes noch zu beachten ist, daß ihre Höhen über dem Erdboden bezw. 1,18 m und 1,25 m betrugen), ihre horizontale Entfernung zu 159,3 m.

Beispiel V (Tafel V). Lindenkrug bei Göttingen, von *drei* Standpunkten aus aufgenommen. Zur Bestimmung der ersten Orientierung der drei Bilder nach den Sätzen (15) und (19) wurden die drei Horizontalwinkel ψ_1, ψ_2, ψ_3 abgelesen, unter welchen je von dem einzelnen Standpunkte O_1, O_2, O_3 aus die äußersten Gebäudekanten und zwar des zweiten Stockwerkes erscheinen; für die Winkel ergaben sich die Werte $\psi_1 = 18^\circ 14'$, $\psi_2 = 18^\circ 33'$, $\psi_3 = 16^\circ 33'$. Die Bestimmung der zweiten Orientierung wurde nach der vierten Methode (p. 133 f.) ausgeführt. Es wurden mit einem Theodoliten von jedem Standpunkte aus die Horizontalwinkel σ_1, σ_2, σ_3 und α_1, α_2, α_3 zwischen den beiden anderen Standpunkten und der Spitze P des höchsten Turmes gemessen (Fig. 116). Die ausgeglichenen Werte der Winkel sind folgende:



Figur 116.

$$\sigma_1 = 71^\circ 31',5, \qquad \alpha_1 = 25^\circ 16',8,$$
$$\sigma_2 = 44^\circ 20', \qquad \alpha_2 = 21^\circ 10',3,$$
$$\sigma_3 = 64^\circ 8',5, \qquad \alpha_3 = 42^\circ 35'.$$

1) Daß man beispielsweise unter Benutzung der Fluchtpunkte der horizontalen Gebäudekanten noch einfachere Höhenbestimmungen ausführen kann, sei hier nur andeutungsweise bemerkt. Vgl. p. 126.

Sie gestatten (unter Benutzung eines genauen Transporteurs) die gegenseitige Lage der Punkte O_1', O_2', O_3', P' und mit Hilfe der drei Bilder und ihrer ersten Orientierungen auch die Horizontgrundrisse h_1', h_2', h_3' zu zeichnen. Die drei Distanzen wurden für den Grundriß wieder verdoppelt. Für den Punkt P ist auch die Bestimmung seiner Höhen $P'P^*$, $P'P^{**}$ und $P'P^{***}$ über den drei Horizontebenen gestrichelt ausgezogen. Die Unterschiede dieser drei Höhen geben zugleich wieder die Höhenunterschiede der drei Standpunkte an. Für den gezeichneten Aufriß des Gebäudes ist die zweite Bildebene als Aufrißebene gewählt. Die zu 114,4 m direkt gemessene Strecke $O_2'O_3'$ ermöglichte, den Maßstab für die Grund- und Aufrißzeichnung von vornherein gleich 1 : 300 zu wählen.

Dritter Abschnitt: Die praktischen Anwendungen der Photogrammetrie.

Wir gehen nunmehr dazu über, die Anwendungen der Photogrammetrie in den verschiedensten Gebieten zu besprechen. Wir werden zugleich hier auch die geschichtliche Entwicklung der Photogrammetrie streifen, auf die im einzelnen einzugehen ich mir versagen muß.[1])

§ 9. Beziehung zur Malerei.

Zuerst möchte ich auf die interessante *Beziehung der Photogrammetrie zur Malerei* hinweisen. Wie die malerische Perspektive die geometrischen Gesetze aufstellt, welche für den ausübenden Künstler beim Entwerfen seines Gemäldes ihre Rolle spielen, so werden wir andrerseits, wenn wir vor ein fertiges Bild treten, die Frage uns vorlegen können, inwieweit

1) Über die Geschichte der Photogrammetrie findet man Näheres in:

CHR. WIENER, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I, Leipzig 1884, p. 51—53.

FR. STEINER, Die Photographie im Dienste des Ingenieurs, Wien 1891, p. 163—169.

E. DOLEZAL, Die Anwendung der Photographie in der praktischen Meßkunst, Halle a. S. 1896, p. 94—106.

F. SCHIFFNER, Die photographische Meßkunst oder Photogrammetrie, Bildmeßkunst, Phototopographie, Halle a. S. 1892, p. 72.

A. LAUSSEDAT, La Métrophotographie, Paris 1899, p. 34ff.

und in dem mehrfach erwähnten Referat von Herrn S. FINSTERWALDER. Bald ist auch der Artikel des Herrn S. FINSTERWALDER über Photogrammetrie in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften zu erwarten.

dabei nun diese Regeln wirklich zur Geltung gebracht sind, eine Frage, für deren Beantwortung eben die entwickelten Methoden der Photogrammetrie maßgebend sind.[1]) Es ist überaus verlockend und anregend, von den ältesten Zeiten beginnend, die Gemälde der bedeutendsten Meister in den verschiedenen Kunstepochen, besonders die, welche architektonischen Aufbau zeigen, zu überblicken und an dem einzelnen Bilde die Perspektive der Zeichnung zu prüfen.[2]) Freilich wird man sich stets vor Augen halten müssen, daß die Malerei keine Geometrie ist, daß noch andere Gesichtspunkte für jene in Betracht kommen, insbesondere der höchste Zweck jedes künstlerischen Schaffens, die Schönheit, welche mancherlei Abweichungen von den geometrischen Sätzen der Perspektive in der Behandlung der Figuren geradezu fordert.[3])

---

1) „Man fordert mit Recht, daß der Maler sein Bild nach den strengen Regeln der Kunst genau verzeichne, wenn er dem Tadel entgehen will, der gegründet ist; allein wenn er seinen Regeln gefolgt und die Bilder richtig entworfen und ausgemalt hat, so hat er das Recht zu fordern, daß man es als ein Kenner beschaue", J. H. LAMBERT, Freie Perspektive usw. I. p. 178.

Neben der Linienperspektive unterscheidet man noch die Farben- und Luftperspektive (d. h. die Berücksichtigung der Wirkungen von Licht und Luft bei der Wiedergabe der Natur), die für uns hier nicht in Betracht kommen. Vgl. J. H. LAMBERT, l. c. p. 201: „Die Regeln der Perspektive erschöpfen den Reichtum der Malerkunst lange nicht, und diese wird sich immer die Kunst der Farben, die feinere Ausbildung der Teile, das Natürliche in Austeilung des Lichtes und Schattens und die Entwerfung solcher Dinge, wobei Lineal und Zirkel nichts helfen, als ein Eigentum vorbehalten."

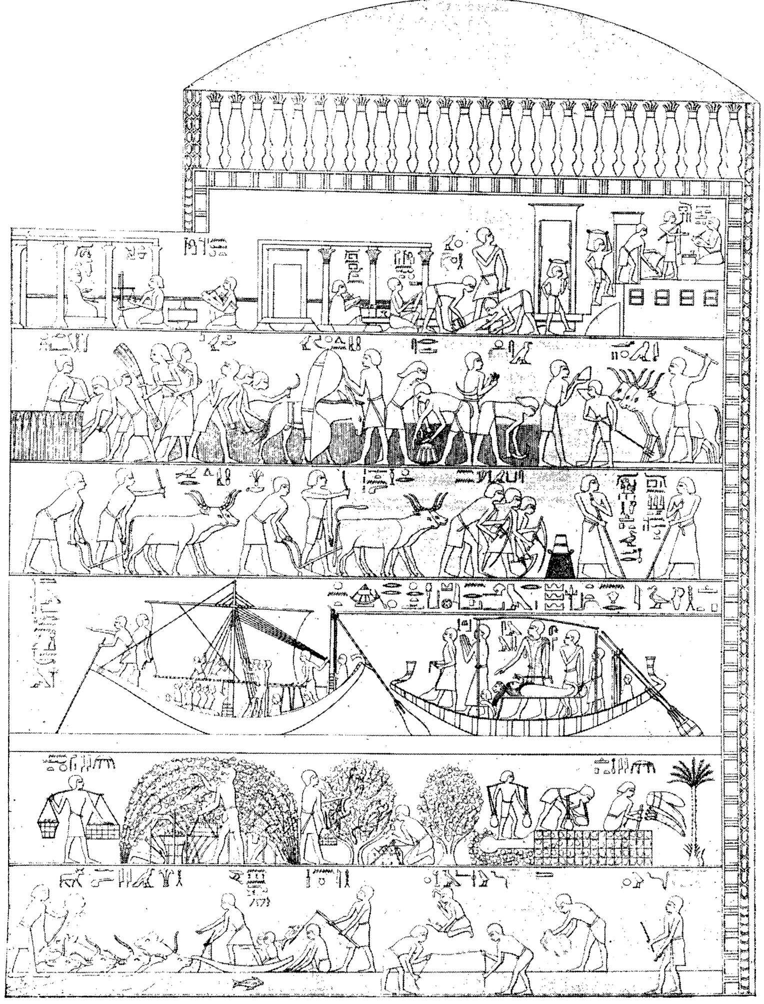
In engster Beziehung zu den Betrachtungen des Textes steht auch der im Math.-Verein München gehaltene Vortrag des Herrn K. DOEHLEMANN: „Raumkunst und Illusionsmalerei", der in der Beilage zur „Allgemeinen Zeitung" Nr. 168 vom 25. Juli 1904 abgedruckt ist.

2) Gelegentlich der Modellausstellung in München 1893 hat Herr L. BURMESTER eine Sammlung von zwanzig Gemälden alter Meister mit Einzeichnungen und Erläuterungen zur Untersuchung der Perspektive vorgelegt und hierbei auf die berechtigten und nichtberechtigten Abweichungen von den strengen Regeln hingewiesen. Vgl. W. DYCK, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, Nachtrag, München 1893, p. 51.

Auch G. SCHREIBER, Malerische Perspektive, Karlsruhe 1854, die für Künstler geschrieben ist, enthält neben vielen kunstgeschichtlichen Bemerkungen eine Untersuchung von Bildern bedeutender Maler, desgl. FR. BOSSUET (Maler und Professor an der Akademie der Künste in Brüssel), Traité de perspective linéaire, 2 vol., Brüssel 1871.

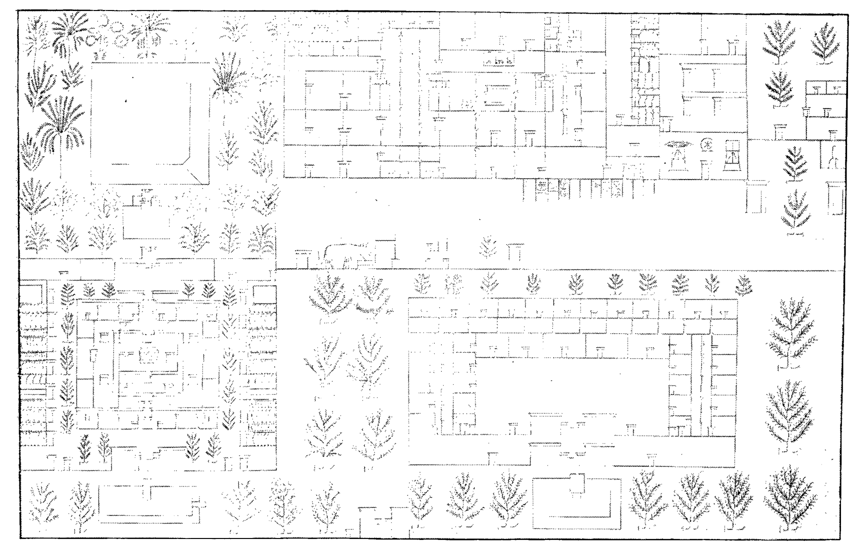
3) Mit Recht hebt daher L. BURMESTER (W. DYCK, l. c. p. 51) hervor, daß „alle Abweichungen von den Gesetzen der Perspektive künstlerisch vollberechtigt sind

Die Perspektive ist ja in ihren ersten Anfängen aus den Bedürfnissen der Malerei hervorgegangen. Die ägyptischen

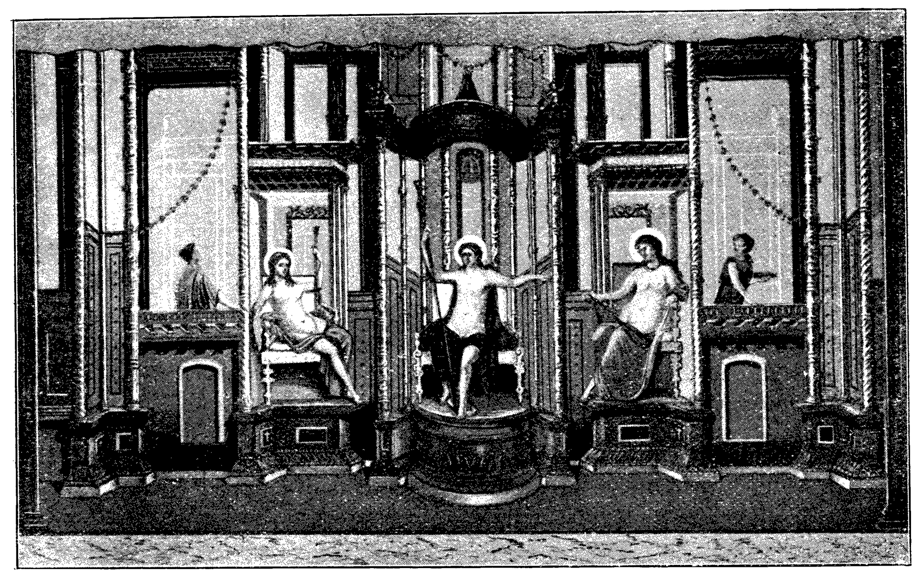


Figur 117. Darstellung im Aufriß (ca. 1900 v. Chr.). Bilder aus dem Leben, Relief aus dem Grabe des Chnemhotep in Beni Hassan, nach Lepsius, Denkmäler, Abt. II, Blatt 127.

und nicht als Fehler zu betrachten, wenn diese Abweichungen von der Schönheit des Bildes gefordert werden und so geordnet sind, daß dieselben nicht im bemerkbaren Widerspruch mit unserer perspektivischen Anschauung stehen, die wir durch die Beobachtung in der Wirklichkeit empfangen haben." Doch ist auch von manchen Seiten auf eine Beschränkung der künstlerischen Freiheiten in der Behandlung der Perspektive hingewiesen. Vgl. in dieser Hinsicht die genannten Werke von G. Schreiber und Fr. Bossuet, sowie J. de la Gournerie, Traité de perspective linéaire, 3. Aufl., Paris 1898.



Figur 118. Kavalierperspektivische Darstellung (ca. 1400 v. Chr.). Palastanlage, Relief im Grabe des Meryre in Tell Amarna, nach Lepsius, Denkmäler, Abt. III, Blatt 95.



Figur 119. Wandmalerei „mit Scheinarchitekturen“ aus Pompeji, (nach Presuhn, Blatt XII).

Flachreliefs lassen noch keinerlei Kenntnis der perspektivischen Gesetze erkennen; die Figur 117 zeigt die Objekte einfach im Aufrisse dargestellt, die Figur 118 in einer Art Kavalier-

perspektive.[1]) Dagegen zeigen uns die aufgefundenen Wandgemälde in Pompeji, Herkulanum und Rom, die stets Frontansichten darstellen, schon die Kenntnis der Fluchtpunkte und Verkürzungen, wenn auch die zur Bildebene senkrechten Geraden stets in verschiedenen Fluchtpunkten konvergieren[2]) (Fig. 119). Im Mittelalter ging die Perspektive wieder verloren und wurde beim Wiedererwachen der Künste und Wissenschaften zu Be-



Figur 120a. Scene aus dem Leben des heil. Franz, Fresko von Giotto in der Oberkirche zu Assisi.

1) Als Literatur, besonders von Tafelwerken, nenne ich: C. R. Lepsius, Denkmäler aus Ägypten und Äthiopien nach den Zeichnungen der in den Jahren 1842—45 ausgeführten wissenschaftlichen Expedition, 12 Bände (fol. gigant.), Berlin 1849—1854; Prisse d'Avennes, Histoire de l'art égyptien d'après les monuments, Textband und 2 Atlanten, Paris 1878—1879; A. Erman, Ägypten und ägyptisches Leben im Altertum, 2 Bände, Tübingen 1885—1887; N. de G. Davies, The rock tombs of El Amarna, Part I, the tomb of Meryra, London 1903; G. Perrot et Ch. Chipiez, Histoire de l'art dans l'antiquité, t. I et II (Égypte, Chaldée et Assyrie), Paris 1882 und 1884; A. H. Layard, The monuments of Niniveh, London 1849.

2) W. Zahn, Die schönsten Ornamente und merkwürdigsten Gemälde aus Pompeji, Herculanum und Stabiae, 3 Serien von je 10 Heften, Berlin 1828—1859; Fausto e Felice Niccolini, Le case ed i monumenti di Pompei, 3 Bände, Neapel 1854, 1862, 1890; W. Ternite, Wandgemälde aus Pompeji und Herculanum, Berlin 1844; P. d'Amalio, Pompei dipinti murali scelti, Neapel; A. Man, Geschichte der dekorativen Wandmalerei in Pompeji, mit 20 Tafeln, Berlin 1882; E. Presuhn, Die pompejanischen Wanddekorationen, mit 24 Tafeln, Leipzig 1882.

In der Optik des Euklid (290 vor Chr.) finden sich bereits die wichtigsten perspektivischen Erscheinungen zusammengestellt, wie sie das Beschauen der

ginn der Renaissance dann gleichzeitig in Italien und im Norden neu gefunden. Gerade dieses erneute Auftreten der Perspektive in der Malerei zu studieren, ist eine äußerst dankbare und interessante Aufgabe. In Italien zeigen die Werke von GIOTTO (ca. 1266—1337) (Fresken in der Kapelle St. Croce zu Florenz, in der Oberkirche zu Assisi, Fig. 120a und b, und in der Kapelle der Madonna dell' Arena in Padua) wie auch die seiner Schüler noch eine sehr geringe Kenntnis der Perspektive. Erst in der Vorrenaissance, im Quattrocento, sehen wir in den Bildern der Maler die Perspektive zu größerer Klarheit entwickelt, wenn auch nicht überall die Einheit des Augenpunktes gewahrt ist, während zugleich der Baumeister BRUNNELESCHI (1377—1466), der Bildhauer DONATELLO (1386—1468) und der Baumeister und Gelehrte LEON BATTISTA ALBERTI[1]) (1404—1472) in Schriftwerken die neue Kunst entwickelten. Von den beiden ersten unterrichtet waren besonders

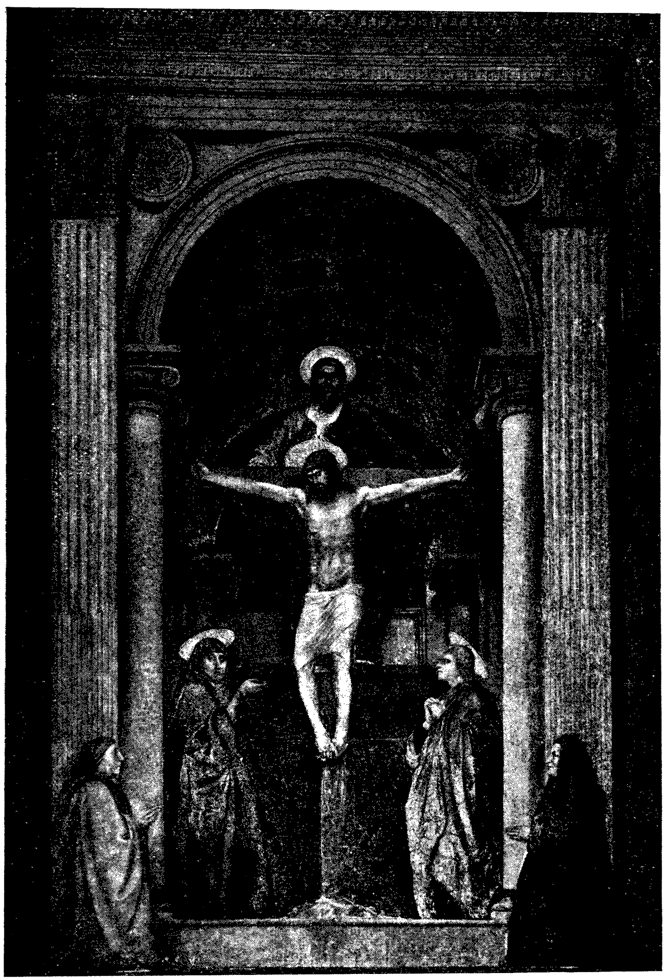


Figur 120b. Der Traum des Papstes, Fresko von Giotto in der Oberkirche zu Assisi.

Dinge mit dem Auge, das unmittelbare Sehen, liefert (Abhängigkeit des Sehwinkels von der Entfernung u. dgl.), ohne daß von einem Abbilden der Dinge die Rede ist.

1) Sein vor 1446 geschriebenes Buch „De pictura", 3 Bde., zuerst gedruckt 1511 in Nürnberg, ist das älteste uns erhaltene Werk über Perspektive. Vgl. Leon Battista Albertis kleinere Schriften, herausgegeben von Dr. H. JANITSCHECK, Wien 1887, (Quellenschriften für die Kunstgeschichte von R. Eytelberger von Edelberg). — Im Jahre 1505 erschien in Toul als erstes gedrucktes Buch: VIATOR (JEAN PELERIN), De artificiali perspectiva, in Facsimile neu erschienen Paris, Librairie Tross.

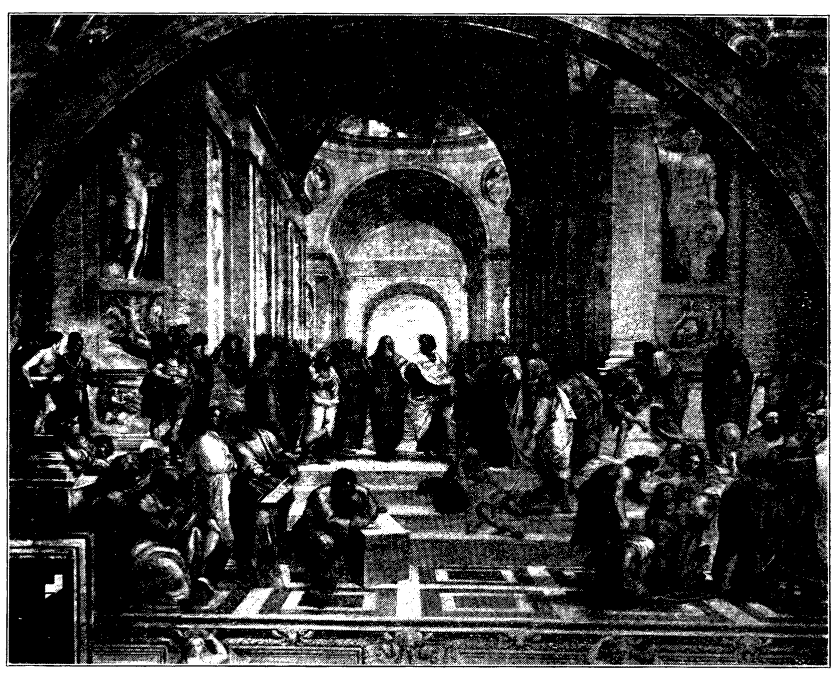
MASACCIO (1401—1429) und seine Schüler BENOZZO GOZZOLI (1420 —1498) und FRA FILIPPO LIPPI (ca. 1406—1469) bemüht, in ihren Bildern eine richtige Perspektive sowohl der Gebäude wie der Personen durchzuführen (von MASACCIO: Fresko der Drei-



Figur 121. Masaccio, Dreifaltigkeit (Fresko in S. Maria Novella, Florenz).

faltigkeit in S. Maria Novella in Florenz, Fig. 121; von GOZZOLI: Darstellungen aus dem alten Testament, 22 Fresken im Campo-Santo zu Pisa, von LIPPI: Leichenbegängnis von S. Stefano, Gastmahl des Herodes, Fresken im Chor des Domes in Prato)[1].

1) „MASACCIO überrascht uns zunächst mit der vollkommenen Bewältigung des Raumproblems. Zum erstenmal ist das Bild eine Bühne, die unter Festhaltung

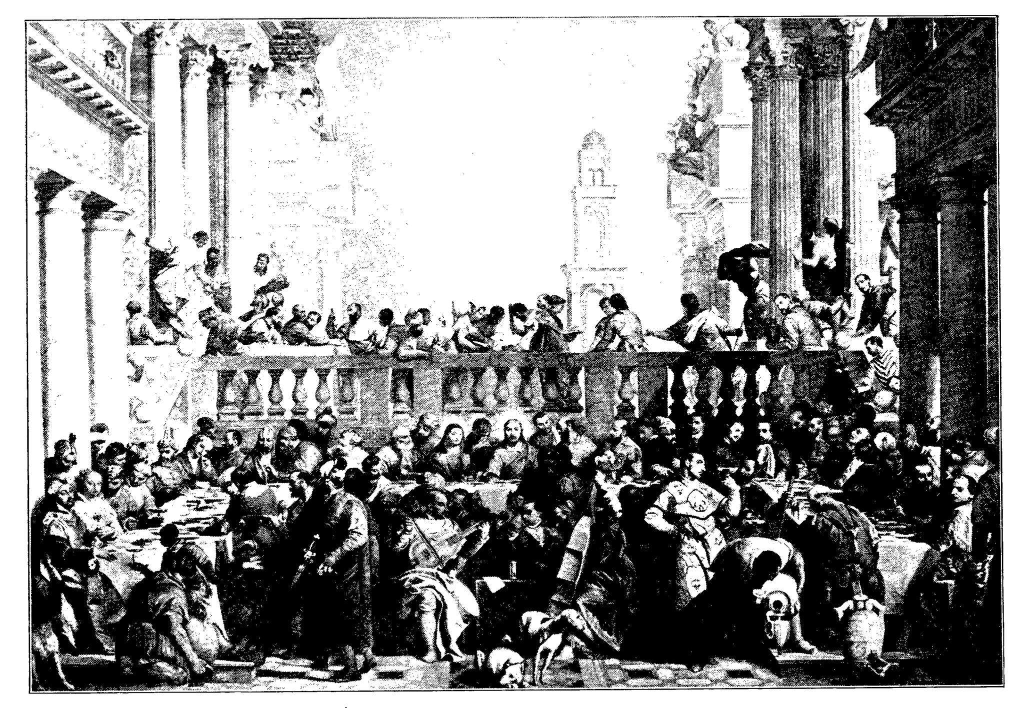


Figur 122. Raffael, Schule von Athen (Fresko in der Stanza della Segnatura, Vatikan).

Erst bei den Meistern der Hochrenaissance im 16. Jahrhundert, LEONARDO DA VINCI (1452—1519), RAFFAEL SANTI (1483—1520),

eines bestimmten Augenpunktes konstruiert ist, ein Raum, in dem Menschen, Bäume, Häuser ihren bestimmten, geometrisch nachrechenbaren Platz haben. Bei GIOTTO bleibt noch alles zusammen, er läßt Kopf über Kopf erscheinen, ohne sich genügend Rechenschaft zu geben, wo die Körper Platz finden, und die Architektur des Hintergrundes ist ebenfalls nur eingeschoben als eine unsicher schwankende Kulisse, die im Größenverhältnis keinen realen Bezug zu den Menschen hat. MASACCIO gibt nicht nur mögliche Häuser, die Räumlichkeit der Bilder ist klar bis in die letzten Landschaftslinien. Er nimmt den Augenpunkt in der Höhe der Köpfe, die Figuren auf der ebenen Bühne haben also alle gleiche Scheitelhöhe; mit welcher Festigkeit wirkt nun so eine Reihe von drei Profilköpfen hintereinander, die etwa durch einen vierten Facekopf abgeschlossen wird! Schritt für Schritt werden wir in die Tiefe des Raumes hineingezogen, alles schichtet sich klar hintereinander, und will man die neue Kunst in ganzer Glorie schauen, so gehe man nach S. M. Novella und sehe das Fresko der Dreifaltigkeit, wo mit Hilfe der Architektur und unter Ausnutzung der Überschneidungen vier Zonen nach der Tiefe mit stärkster Raumwirkung entwickelt sind. GIOTTO erscheint daneben völlig flach. Seine Fresken in S. Croce wirken wie ein Teppich, die gleichmäßige blaue Farbe des Himmels bindet an sich schon die verschiedenen Bilder übereinander zu einer flächenartigen Wirkung zusammen.“ Aus H. WÖLFFLIN (Prof. der Kunstgeschichte an der Universität Berlin), Die klassische Kunst, München 1901, p. 9.

Michelangelo Buonarotti (1475—1564) feiert die Perspektive ihre höchste Vollendung in Italien. Der auch als Ingenieur, Physiker, Mathematiker, Anatom und Musiker bedeutende Maler Leonardo



Figur 123. Paolo Veronese, Hochzeit zu Kana (Louvre, Paris).

da Vinci schrieb in seinem leider verloren gegangenen „Trattato della pittura" sogar eine Abhandlung über die Perspektive.[2]) Im einzelnen möchte ich nur auf die drei Gemälde von Raffael, das „Sposalizio" (in der Galeria di Brera in Mailand), die „Disputa" und die „Schule von Athen" (in der Stanza della Segnatura des Vatikans), Fig. 122, hinweisen, in denen die Beherrschung der Perspektive die künstlerische Wirkung der Bilder wesentlich mit hervorruft. Daß die Maler am Ende der glänzenden Renaissance wieder lässig in der Anwendung der perspektivischen Gesetze werden, zeigt das Bild von Paolo Vero-

2) Vgl. Th. Beck (Darmstadt), Die Geometrie krummliniger Figuren Leonardo da Vincis, Zeitschrift für gewerblichen Unterricht, Jahrgang 18, 1904, und M. Hersfeld, Leonardo da Vinci, Leipzig 1904.

NESE (1528—1588) „Die Hochzeit zu Cana" (Fig. 123), das sieben Augenpunkte und fünf Horizonte besitzt.[1])

Im Norden ist noch früher als in Italien der Sinn für perspektivische Richtigkeit der Zeichnung erwacht. Denn die ersten bedeutenden Meister der Niederländer, HUBERT VAN EYCK (ca. 1370—1426) und sein Bruder und Schüler JAN VAN EYCK (ca. 1390—1440) sind ihren italienischen Zeitgenossen in der Anwendung der Perspektive schon weit voraus. Sie besitzen bereits die Kenntnis des Fluchtpunkts, der freilich nicht immer einheitlich gewahrt ist („Genter Altarbild", Fig. 124). Ihre Nachfolger ROGIER VAN DER WEYDEN (1400—1464) (Fig. 125)[2]) und dessen Schüler HANS MEMLING (1440—1490) haben die Linienperspektive noch weiter ausgebildet. Erst die Blütezeit der deutschen Kunst mit ALBRECHT DÜRER (1471—1528) an der Spitze hat auch die Entwicklung der Perspektive bis zur wissenschaftlichen Vollendung geführt. Außer dem bereits oben besprochenen Bilde des „heiligen Hieronymus im Gehäuse" sind hier noch manche andere Bilder dieses Meisters des Holzschnitts



Figur 124. Hubert und Jan van Eyck, Die Verkündigung (aus dem Genter Altarbild).

1) FR. BOSSUET hat in seinem obengenannten Werk eine Darstellung der Architektur des obigen Bildes mit einem einzigen Augenpunkt entworfen, das im wesentlichen dieselbe Anordnung und Schönheit zeigt und damit der Behauptung entgegentreten soll, daß eine Abweichung von den strengen Regeln der Perspektive oft notwendig sei.

2) Die Figuren 120 a, b und 125 sind dem im gleichen Verlage erschienenen Werke: F. ROSEN, Die Natur in der Kunst, Studien eines Naturforschers zur Geschichte der Malerei, Leipzig 1903, entnommen, das unser besonderes Interesse gerade deswegen verdient, weil es auch die Entwicklung der Perspektive in der Malerei bespricht.

und Kupferstichs zu nennen, so der Kupferstich von 1504 „Die Geburt Christi“ (Fig. 126) oder „Die Rast der heiligen Familie in Ägypten“ aus dem Holzschnittwerk „Das Marienleben“, welche die gleiche Freude an sorgfältiger perspektivischer Zeichnung bekunden. Das erste dieser Bilder z. B. gestattet ebenfalls sofort die Rekonstruktion des Grund- und Aufrisses, insbesondere für



Figur 125. Zwei Teile von dem „Johannes-Triptychon“ des Rogier van der Weyden (Frankfurt, Städelsches Institut).

den Brunnen, da dessen Pfeiler quadratisch sind (vgl. Satz 6, p. 103)[1]), was gerade für unsern photogrammetrischen Standpunkt von besonderem Interesse ist. Nicht unerwähnt darf ich lassen,

1) In der Ihnen hier vorliegenden ausgeführten Zeichnung ist insbesondere auch für eine Reihe von Punkten auf dem Rande der Grundplatte des Brunnens die Rekonstruktion ihrer Grundrisse durchgeführt. Es zeigt sich, daß diese angenähert auf einem Kreise liegen und erst größere Abweichungen für die hinteren Punkte sich ergeben.

daß DÜRER auch das erste deutsche Werk über Perspektive verfaßte: Underweysung der Messung mit Zirkel und Richtscheyt usw., Nürnberg 1525.[1]) Freilich wird in diesem Buche die Perspektive nur an dem Beispiel eines auf einer Tischplatte stehenden Würfels in Frontstellung mit seinem Schatten bei Zentralbeleuchtung entwickelt; daneben aber bildet DÜRER eine Reihe von ihm konstruierter Apparate ab, um mit deren Hilfe die Perspektive beliebiger Gegenstände mechanisch zu entwerfen. Da diese Bildchen mir ganz besonders geeignet erscheinen, dem Schüler das Wesen der Perspektive zu erläutern, so möchte ich sie nach den Originalen hier wiedergeben (Fig. 127 bis 130). Das letztere hat geradezu Anlaß gegeben, daß man noch heute von der DÜRERschen Glastafelmethode spricht.[2]) Von

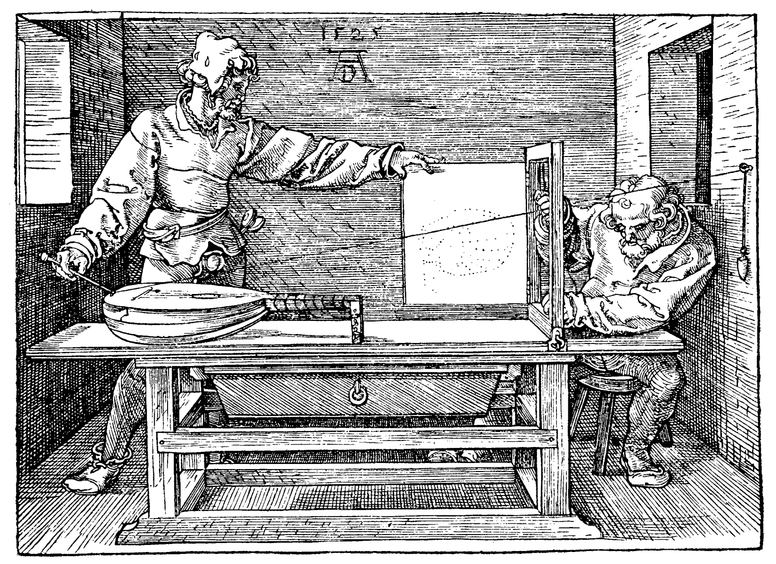


Figur 126. Albrecht Dürer, Geburt Christi.

1) Die zweite Auflage von 1538 kann ich Ihnen in einem Exemplar aus unserer Kgl. Universitätsbibliothek vorlegen. — Vgl. auch H. STAIGMÜLLER, Dürer als Mathematiker, Programm, Stuttgart 1891.

2) In geometrischem Sinne wurde die Perspektive nach DÜRER insbesondere von G. DESARGUES (1636) durch Einführung der perspektivischen Koordinaten und von J. H. LAMBERT durch Entwicklung der freien Perspektive in seinem schon oft genannten und für die späteren Veröffentlichungen vorbildlichen Werke gefördert, bis die projektive Geometrie (PONCELET, MÖBIUS, STEINER, v. STAUDT, CHASLES u. a.) ein ganz neues Licht auf die Perspektive warf.

den Zeitgenossen Dürers nenne ich noch besonders Lucas Cranach (1472—1553), Hans Holbein den Jüngeren (1497—1543) und



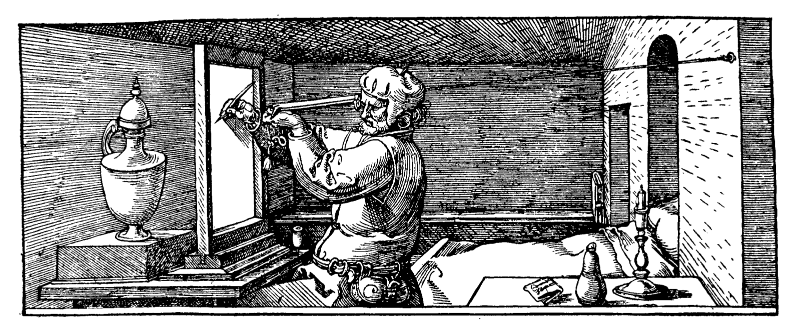
Figur 127. Perspektive der Laute.



Figur 128. Perspektive des Mannes.

den sogenannten Meister vom Tode der Maria (tätig 1510—1530) (Fig. 131). Doch auch die Zeit des Barock weist noch manche durch ihre Perspektive ausgezeichnete Gemälde auf, wofür uns

Pieter Neefs der Ältere (1578—1660) und sein Sohn Pieter Neefs der Jüngere (tätig um 1650) mit mehreren Innendarstellungen des Domes in Antwerpen in der uns nahen Galerie zu Cassel treffliche Beispiele bieten. In der modernen Zeit ist indes leider die Freude an der Perspektive bei unseren Malern ziem-



Figur 129. Perspektive der Vase.



Figur 130. Glastafelmethode.

lich geschwunden. — Was neuere Literatur betrifft, so möchte ich Ihre Aufmerksamkeit noch auf folgende Werke lenken:

Guido Hauck, Die subjektive Perspektive und die horizontalen Kurvaturen des dorischen Stils, Stuttgart 1879, und

Adolf Hildebrand (der bekannte Bildhauer), Das Problem der Form in der bildenden Kunst, Straßburg, III. Auflage 1901.

Die interessanten und eigenartigen Auffassungen der Verfasser stehen in engster Beziehung zu unsern Entwicklungen.

Ich bin um so lieber auf die Beziehungen der Perspektive



Figur 131. Meister des Marientodes: Der Tod Mariae (Münchener Pinakothek).

und Photogrammetrie zur Kunstgeschichte eingegangen[1]), weil gewiß kein Lehrer, besonders auch beim Unterricht in der

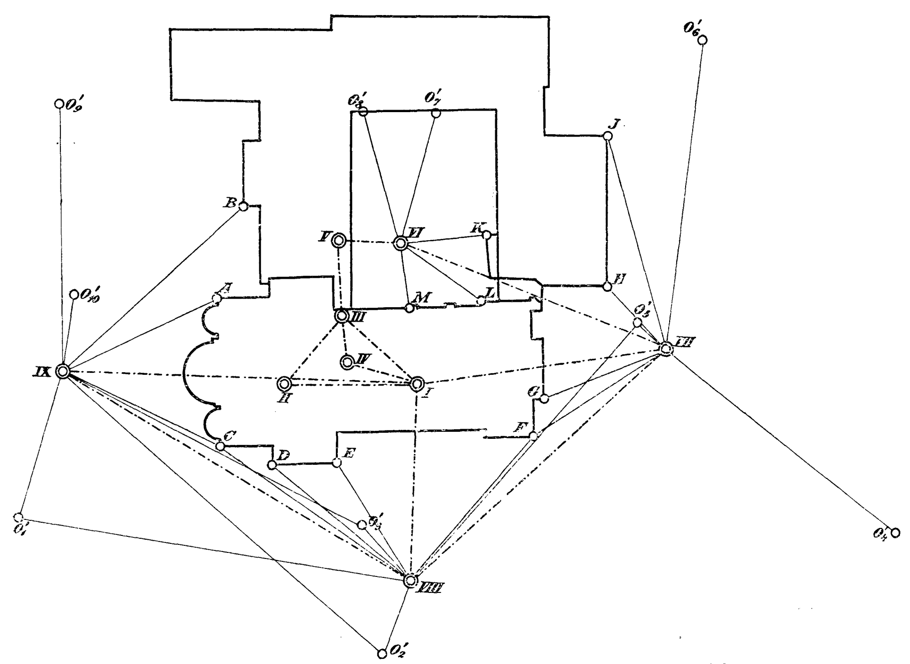
1) Ausführlichere Darstellung der Beziehung der Malerei zur Perspektive findet man in der vortrefflichen historischen Einleitung bei CHR. WIENER, Lehrbuch der darstellenden Geometrie I, p. 5—21, ferner bei G. NIEMANN, Handbuch der Linearperspektive für bildende Künstler, herausgegeben mit Unterstützung des K. K. Ministeriums für Kultus und Unterricht, Stuttgart, 2. Auflage 1902, L. F. J. HÜGEL, Geschichtliche und systematische Entwicklung und Ausbildung der Perspektive in der klassischen Malerei, Würzburg 1882, sowie bei J. H. LAMBERT, l. c. II. p. 5--35.

Herr H. WÖLFFLIN sagt im Vorwort seines schon genannten Werkes p. XII: „Über die Entwicklung der Zeichnung, der Beleuchtung, der Perspektive und Raumdarstellung usw. müssen zusammenhängende Untersuchungen gemacht sein, wenn die Kunstgeschichte nicht nur Illustration der Kulturgeschichte sein will, sondern auf eigenen Füßen stehen soll."

direkten Perspektive, es sich entgehen lassen sollte, durch Vorführung klassischer Bilder mit perspektivischer Zeichnung, wenn auch mit den bescheidensten Mitteln, das Interesse seiner Schüler für die geometrischen Theorieen zu fördern, was in erhöhtem Maße in Betracht kommt, wenn der Mathematiker genug künstlerische Veranlagung besitzt, um auch den gewöhnlichen Zeichenunterricht zu erteilen.[1])

§ 10. Anwendungen in der Architektur.

Auch die zweite Anwendung der Photogrammetrie, von der ich Ihnen jetzt berichten möchte, die *Beziehung zur Architektur oder Baukunst*, wird wesentlich von künstlerischem Inter-



Figur 132. Photogrammetrische Rekonstruktion der Klosterkirche in Jerichow. Polygonnetz für die Standpunkte O_i der 10 wichtigsten Aufnahmen.

1) In dieser Hinsicht vgl. C. Hildebrandt, Über Ausbildung des Kunstsinns an den höheren Lehranstalten, insbesondere durch Geometrie und Zeichnen, Programm, Braunschweig 1897, und G. Hauck, Über innere Anschauung und bildliches Denken, Kaisersgeburtstagsrede an der Kgl. Technischen Hochschule, Berlin 1897.

Auch von seiten der Philologen wie der Volksschullehrer wird zur Zeit mit Nachdruck auf die Pflege des Kunstsinnes im Zeichenunterricht hingewiesen, wobei besonders ästhetische Momente im Vordergrunde stehen. Vgl. den Vortrag von

esse beherrscht. Im Jahre 1885 wurde von dem damaligen Kultusminister G. von Gossler in Berlin die Kgl. Preußische Meßbildanstalt (Berlin W., Schinkelplatz 6 in der ehemaligen Bauakademie) gegründet, wozu der dies Institut jetzt noch leitende Herr Geheimrat A. Meydenbauer die Anregung gab. Ohne,



Figur 133. Photogrammetrische Rekonstruktion der Klosterkirche zu Jerichow. Aufnahme vom Standpunkte O_1.

wie dieser selbst sagt, die analogen, bereits früher von Herrn A. Laussedat in Paris durchgeführten Versuche zu kennen, kam er bei der Aufnahme mittelalterlicher Bauwerke durch die unverhältnismäßige Schwierigkeit der Messungen in unzugänglicher

---

Herrn L. v. Sybel (Prof. der Archäologie in Marburg), Über die Pflege des Kunstsinnes im Gymnasialunterricht, gelegentlich der 13. Hauptversammlung des „Deutschen Gymnasialvereins" zu Marburg i. H. (1904).

Höhe und ohne Gerüst selbständig auf den Gedanken, photographische Hilfsmittel anzuwenden, und hat bereits im Jahre 1867 die ersten nach dem neuen photogrammetrischen Verfahren ausgeführten Beispiele veröffentlicht.[1]) Seitdem sind die Methoden und instrumentellen Hilfsmittel in der Meßbildanstalt zu höch-

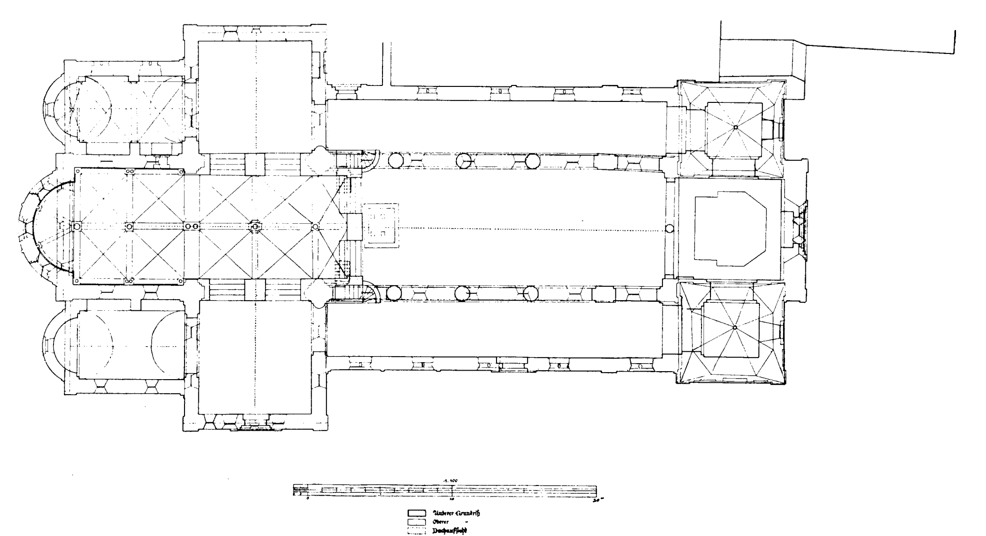


Figur 134. Photogrammetrische Rekonstruktion der Klosterkirche in Jerichow. Aufnahme vom Standpunkte O_4.

ster Vollkommenheit entwickelt. Das Institut umfaßt mehrere Abteilungen, den Aufgaben entsprechend, die photographischen Aufnahmen in den einzelnen Städten auszuführen, die gewonnenen Negative zu entwickeln und zu kopieren, nach den

1) A. Meydenbauer, Über Anwendung der Photographie zur Architektur- und Terrainaufnahme, Zeitschrift für Bauwesen von Erbkam, Bd. XVII, Jahrgang 1867, p. 62—70.

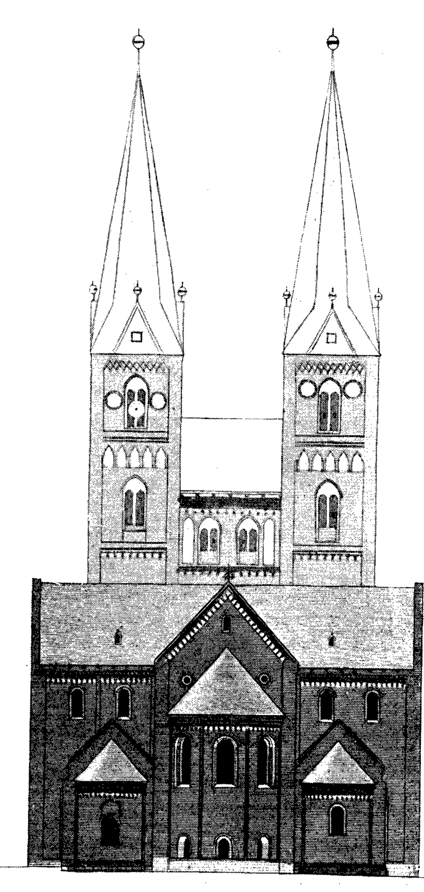
Photographieen sodann den Grund- und Aufriß der Gebäude zu rekonstruieren. Im Laufe der Zeit ist so durch die in einem feuersicheren Raum aufbewahrten Originalnegative (ca. 10000 Stück bis Ende 1903) ein „Denkmälerarchiv" entstanden, in welchem der zeitige Zustand der vaterländischen (sowie einiger anderen) Bauwerke für alle Zukunft festgelegt ist. Zu meiner Freude kann ich Ihnen hier einmal eine große Reihe solcher Meßbilder vorlegen, die von dem Kgl. Ministerium unserer Sammlung geschenkt sind, sodann aber auch die nach dem photogrammetrischen Verfahren erhaltenen Originalzeichnungen des Grund-



Figur 135. Photogrammetrische Rekonstruktion der Klosterkirche in Jerichow. Grundriß.

risses und verschiedener Aufrisse der Klosterkirche zu Jerichow in der Mark Brandenburg. Diese Zeichnungen hat im Auftrage der Meßbildanstalt Herr Baurat W. Körber in Charlottenburg unter Benutzung von 46 photogrammetrischen Aufnahmen (äußere, innere und Detailansichten) im Jahre 1897 ausgeführt und in sehr dankenswerter Weise für meinen heutigen Vortrag mir zur Verfügung gestellt. Die Figuren 132—136a, b geben das Standpunktpolygon, zwei der Meßbilder selber, sowie den Grundriß und zwei Aufriße wieder. In Fig. 132 bedeuten O_i' die zehn Standpunkte der hauptsächlichsten Außenaufnahmen, die mit I bis IX bezeichneten Punkte die zum Einmessen der Standpunkte benutzten Grundpunkte des Dreiecksnetzes und die Punkte A, B, ..., M die zum Zwecke der zweiten Orientierung mit-

eingemessenen Punkte des Bauwerkes. Die beiden hier verkleinerten Meßbilder[1]) (Fig. 133 und 134) sind von den Standpunkten O_1 und O_4 aus aufgenommen; für sie ist $d_1 = 25{,}96$ cm und $d_4 = 34{,}86$ cm. Um die Horizonte auf ihnen zu erhalten, ist die Verbindungslinie der seitlichen Marken im ersten Bilde um 4 cm, im zweiten um 13 cm nach unten zu verschieben, während die Verbindungslinie der oberen und unteren Marken jedes Bildes auf dessen Horizont dann den Hauptpunkt ausschneidet. In der Figur 135 des Grundrisses, in der die verschiedenen Geschosse des Bauwerkes übereinander gezeichnet sind, sei besonders auf die deutlich erkennbare erhebliche Lotabweichung der beiden Türme aufmerksam gemacht, die im Laufe der Jahrhunderte entstanden ist.

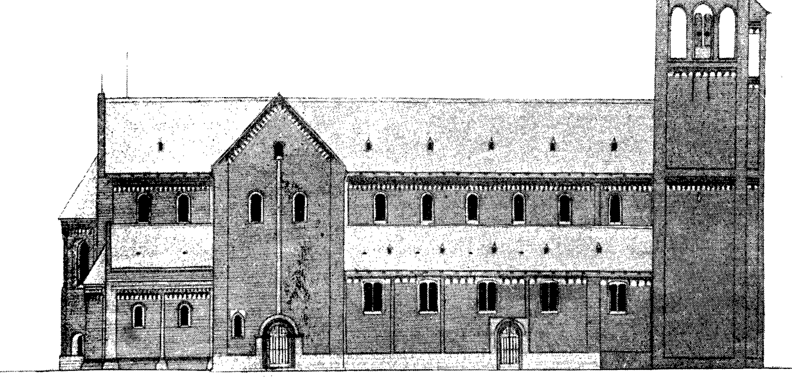


Figur 136a. Photogrammetrische Rekonstruktion der Klosterkirche in Jerichow. Erster Aufriß.

Neben dem kunstgeschichtlichen Interesse, das diese Meßbilder darbieten, kommt für uns Mathematiker eben besonders ihre geometrische Verwendung zur Rekonstruktion der Objekte in Betracht. Einzelne Beispiele bieten in dieser Hinsicht, wie wir schon andeuteten, manche interessante Aufgaben, sei es, daß z. B. die Neigung eines Turmes oder einer nicht horizontalen Kante des Firstes oder auch sonstige Veränderungen des Bauwerks, wie sie sich im Laufe der Zeit von selbst oder durch Umbauten

1) Die Originalbreiten der Figuren 133 und 134 betragen 40 mm. Dementsprechend sind die Zahlenangaben des Textes für die verkleinerten Figuren zu reduzieren.

ergeben haben, eventuell aus mehreren zeitlich voneinander abstehenden Aufnahmen desselben Objektes zu bestimmen sind. Zu weiterem Studium sei empfohlen das Werk von Hrn. A. Meydenbauer: Das photographische Aufnehmen zu wissenschaftlichen Zwecken, insbesondere das Meßbildverfahren, Berlin 1892, sowie das „Verzeichnis der Meßbildaufnahmen mit erläuternden Bemerkungen“ und „die Denkschrift über das Denkmälerarchiv“. Letztere Schriften sind von der Meßbildanstalt unentgeltlich zu beziehen.



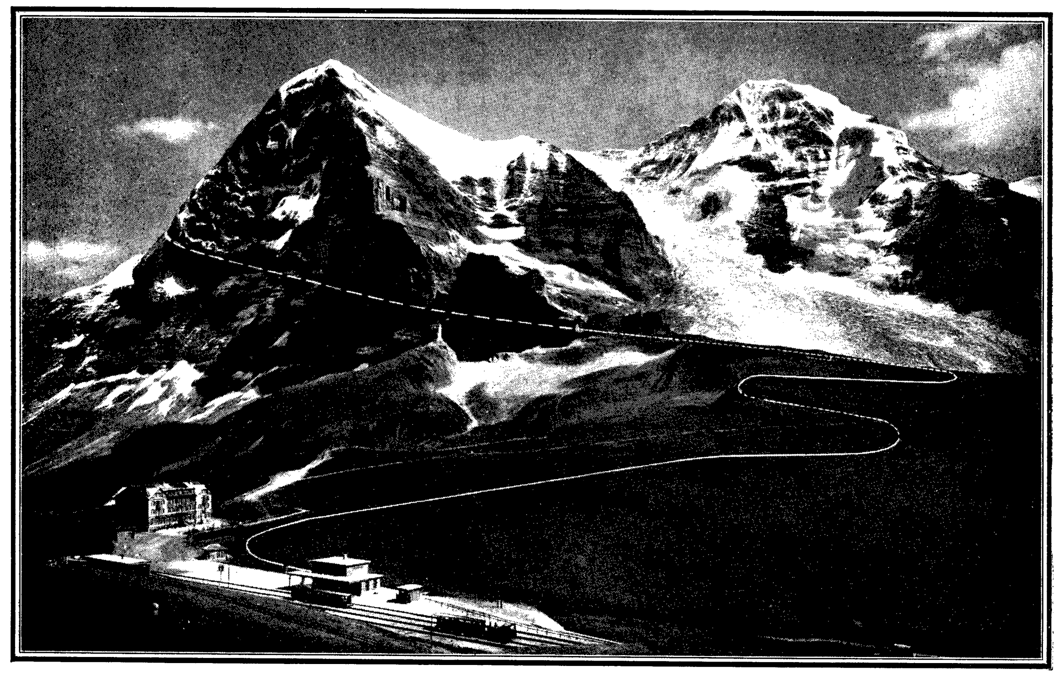
Figur 136b. Photogrammetrische Rekonstruktion der Klosterkirche in Jerichow. Zweiter Aufriß.

§ 11. Anwendungen in der Geodäsie.

Die umfassendste Anwendung findet die Photogrammetrie in der *Geodäsie.* Schon J. H. Lambert deutet eine solche Verwendung perspektivischer Zeichnungen an[1]), und der französische Ingenieur und Forschungsreisende Beautemps-Beaupré hat bereits 1791—93 aus perspektivischen Handskizzen der von ihm besuchten Küsten von Vandiemensland und Santa-Cruz Karten dieser Gebiete gezeichnet. Doch erst die Entwicklung der Photographie konnte diese Methoden zu brauchbarer Vollkommenheit emporheben, wie denn auch mit weitschauendem Blick der Physiker Arago, als er 1839 in der Deputiertenkammer in Paris den Bericht von Daguerre und Nièpce über ihre Erfolge

1) Vgl. Lambert, l. c. I. p. 203, Nr. 7.

in der Photographie vorlegte, in seiner Begleitungsrede bereits die photogrammetrische Bedeutung dieser Erfindung vorausahnte.[1]) Die Verwendung der Photogrammetrie zur Vermessung ist in den letzten Jahrzehnten besonders in den Ländern mit umfangreichen, hohen Gebirgsketten von Bedeutung geworden. So wurden in Italien und Österreich einzelne Alpenketten, in Kanada Teile des Felsengebirges photogrammetrisch



Figur 137. Provisorische Trace der Jungfraubahn.

aufgenommen, während in Deutschland die offizielle Landesvermessung von den photogrammetrischen Methoden nur bei der Kartierung des Zugspitzengebietes durch die topographische Abteilung des Bayrischen Generalstabes Gebrauch gemacht hat. Anstatt im einzelnen hierauf näher einzugehen, möchte ich auf

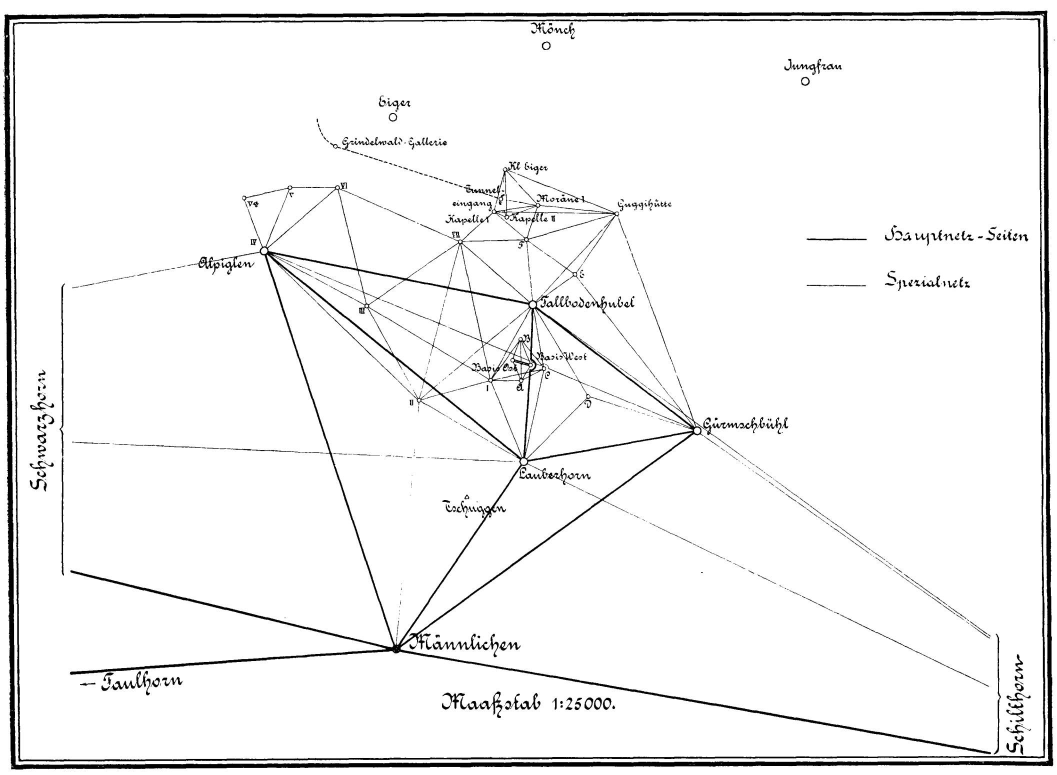
1) Seine Worte sind:

„Les images photographiques, étant soumises dans leur formations aux règles de la géométrie, permettent à l'aide d'un petit nombre de données de rémonter aux dimensions exactes des parties les plus élévées, les plus inaccessibles des édifices. Nous pourrions, par exemple, parler de quelques idées qu'on a eu sur les moyens rapides d'investigation que le topographe pourra emprunter à la photographie."

die wichtigsten Lehrbücher aus den einzelnen Ländern verweisen, die sämtlich Ihnen hier vorliegen.

Aus *Österreich*:

Fr. Schiffner (Professor der Marinerealschule in Pola), Die photographische Meßkunst oder Photogrammetrie, Bildmeßkunst, Phototopographie, Halle a/S. 1892;



Figur 138. Dreiecksnetz der Standpunkte für die photogrammetrischen Aufnahmen betr. die Jungfraubahn.

Fr. Steiner (Professor der Ingenieurwissenschaften in Prag), Die Photographie im Dienste des Ingenieurs, Wien 1891—1893;

Ed. Dolezal (Professor der Geodäsie zu Serajewo), Die Anwendung der Photographie in der praktischen Meßkunst, Halle a/S. 1896.

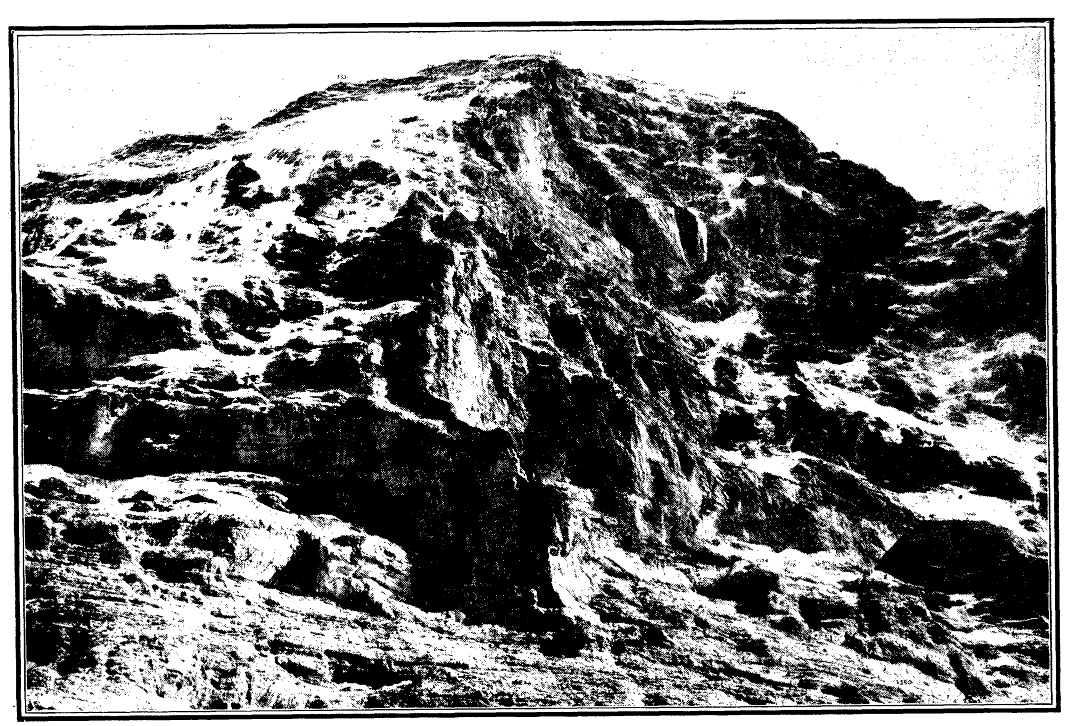
Aus *Italien*[1]):

1) Dort veröffentlichte schon 1853 Professor Porro Applicazione della fotografia alla geodesia, Milano, Periodico il Politecnico, Volume X, XI. —

P. PAGANINI (Ingenieur des geographischen Militärinstituts in Florenz), Fotogrammetria, in den Manuali Hoepli, Milano 1901.

Aus *Frankreich*:

A. LAUSSEDAT (Oberst und Direktor des Conservatoire national des arts et métiers), La métrophotographie, Paris



Figur 139. Die Eigerwand nach der photographischen Aufnahme.

1899[2]); sowie: Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques, tome II: la méthode des perspectives, Paris 1902—3.

Von PAGANINI stammt die Aufnahme der Graiischen Alpen (1880—86) und der Rätischen Alpen (1887), deren auf photogrammetrischem Wege erhaltene Karten auf dem Geographentage in Wien 1891 das größte Aufsehen erregten.

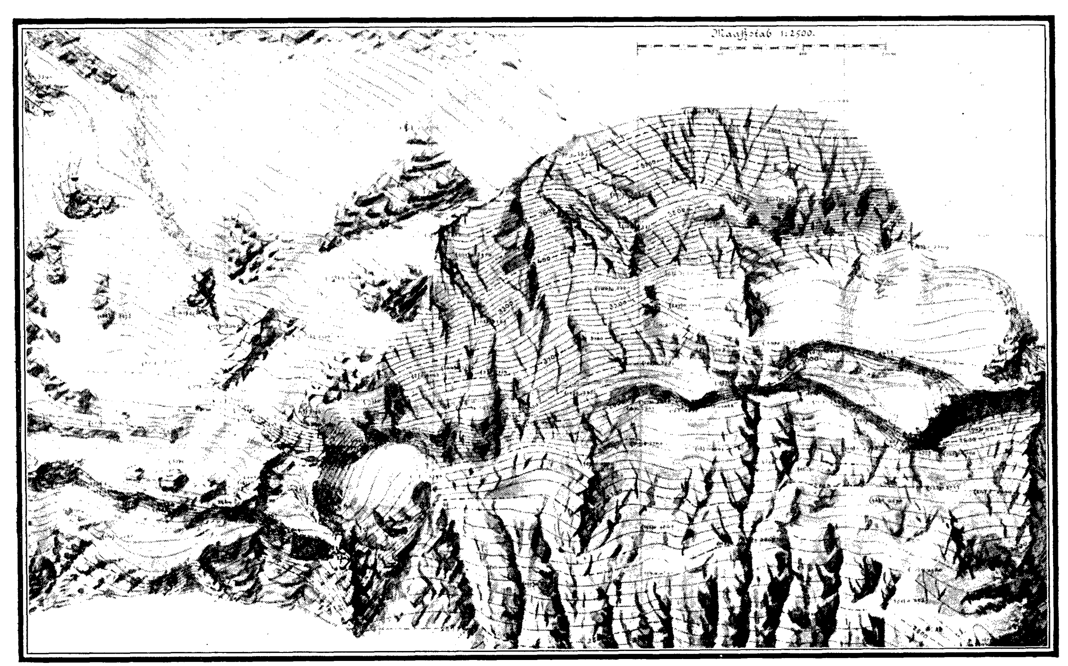
2) Schon 1854 veröffentlichte A. LAUSSEDAT seine erste Arbeit: Mémoire sur l'emploie de la chambre claire dans les reconnaissances topographiques, Mémorial de l'officier du génie, Paris Nr. 16, der dann bis in die neueste Zeit zahlreiche weitere über diesen Gegenstand folgten; insbesondere nenne ich noch aus jüngster Zeit: Sur la stéréoscopie appliquée à l'astronomie, Bulletin de la société astronomique de France, Paris 1903, p. 388—398.

Aus *Kanada*:

E. Deville (Vorstand der Landesvermessung in Kanada), Photographic surveying including the elements of descriptive geometry and perspective, Ottowa 1895.

Aus *Deutschland*:

C. Koppe (Professor der Geodäsie in Braunschweig), Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst, Weimar 1889.



Figur 140. Höhenschichtenplan der Eigerwand, konstruiert nach den photogrammetrischen Aufnahmen und Messungen.

In diesem Werk hat Herr Koppe insbesondere als Beispiel den Roßtrappefelsen im Harz aus drei (dort reproduzierten) Aufnahmen photogrammetrisch ausgemessen und gezeichnet.[1]) In weiteren Kreisen bekannt wurde Koppes Verwendung der Photogrammetrie bei den geodätischen Vorarbeiten zur Jungfraubahn, einem glänzend durchgeführten Beispiel, das die praktischen Vorteile der Methoden ins helle Licht zu setzen berufen

1) Das erste größere topographische Beispiel der Photogrammetrie überhaupt ist die Aufnahme der Oasenstadt Gassr-Dachl in der libyschen Wüste von Professor W. Jordan. Vgl. dessen Aufsatz in der Zeitschrift für Vermessungswesen, V. Bd., Stuttgart 1876, p. 1—17.

ist.[1]) Ich bin durch die Güte des Herrn Koppe in der erfreulichen Lage, Ihnen von den Photographieen und Zeichnungen dieser Arbeit eine Reihe hier vorlegen zu können, besonders solche, die sich auf die Ausmessung der Eigerwand beziehen. Von ihnen geben die Figuren 137—140 eine Auswahl; sie zeigen eine orientierende Ansicht der Eisenbahntrace der Jungfraubahn, sodann vor allem das Dreiecksnetz der Standpunkte, eine Photographie der Eigerwand und deren kotierten Grundriß.

In Deutschland hat vor allem auch Herr S. Finsterwalder in München sich seit 1889 der Ausbildung der Photogrammetrie gewidmet. Seinen Untersuchungen liegen wesentlich Aufnahmen im Hochgebirge und vom Luftballon aus zugrunde. Wieder vermag ich Ihnen eine große Zahl der von ihm aufgenommenen photogrammetrischen Bilder hier vorzuzeigen, die in sehr dankenswerter Weise Herr S. Finsterwalder mir zur Verfügung gestellt hat. Seine Aufnahmen im Hochgebirge beziehen sich besonders auf das Studium der Gletscherformationen. Die Veränderungen, welche ein Gletscher im Laufe der Jahre erleidet, sein Vorrücken oder Zurückweichen, sollen durch mehrere Jahre auseinanderliegende Aufnahmen und daraus abgeleitete Zeichnungen festgestellt werden. Die Aufnahmen aus dem Luftballon dagegen haben einen doppelten Zweck, „sei es, daß man den Ballon zur Auskundschaftung von Objekten, welche anderweitig unzugänglich sind, benutzt, oder daß man den Ballonort um seiner selbst willen möglichst genau zu bestimmen sucht, wie bei meteorologischen Beobachtungen im Ballon“.[2])

---

1) C. Koppe, Photogrammetrische Studien und deren Verwertung bei den Vorarbeiten für eine Jungfraubahn, Schweizerische Bauzeitung Bd. 27, Zürich 1896; und: Die photogrammetrischen Aufnahmen für die Jungfraubahn, ebendas. Bd. 28, Zürich 1896.

2) S. Finsterwalder, Die geometr. Grundlagen der Photogr., p. 30. Von seinen zahlreichen Arbeiten nenne ich besonders:

Die Photogrammetrie in den italienischen Hochalpen, München 1890;

Die Terrainaufnahme mittelst Photogrammetrie, Bayr. Industrie- und Gewerbeblatt, 1890, Nr. 47;

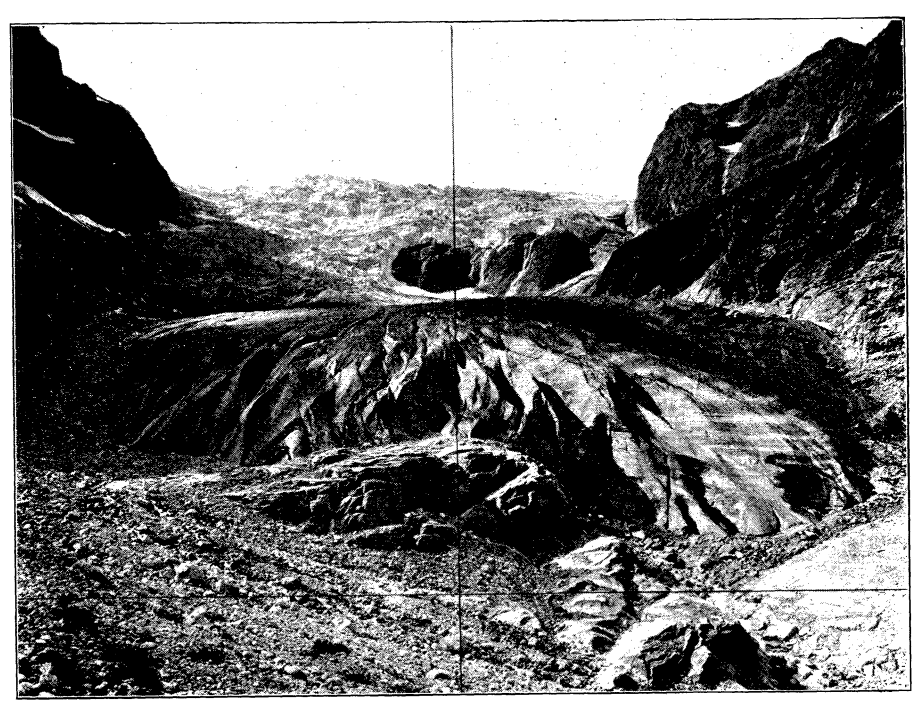
Die Zugspitze, Aufnahmen in 1 : 10000 unter Anwendung der Photogrammetrie, bearbeitet im topographischen Bureau des Kgl. Bayrischen Generalstabes 1892; außerdem:

Photogrammetrischer Theodolit für Hochgebirgsaufnahmen, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 15. Jahrgang, Berlin 1895, p. 370;

Zur photogrammetrischen Praxis, Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 25, Stuttgart 1896, p. 225—240;

Auf einige Beispiele möchte ich an der Hand der vorliegenden Aufnahmen von Herrn FINSTERWALDER etwas näher eingehen.

Erstes Beispiel: Die Figuren 141 a, b geben zwei vertikale Aufnahmen des Lobbiagletschers (1895) mit den eingezeichneten Horizonten und Hauptpunkten. Die Fig. 142 zeigt im



Figur 141 a. Lobbiagletscher. Erste Aufnahme.

Der Vernagtferner, seine Geschichte und seine Vermessung in den Jahren 1888 und 1889, mit einer Karte des Ferners in 1 : 10000, Graz 1897 (112 Seiten);

Photogrammetrische Aufnahme von Höhenkarten vom Luftballon aus, Illustrierte aëronautische Mitteilungen Nr. 4, 1900;

Neue Methode zur topographischen Verwertung von Ballonaufnahmen, Jahresbericht des Münchener Vereins für Luftschiffahrt 1902;

Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen, Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wiss., II. Kl. XXII. Bd. II. Abt., München 1903, p. 225—260.

Besonders elementare Methoden entwickelt die gerade jetzt erschienene letzte Arbeit:

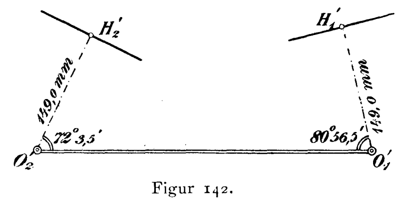
Eine neue Art, die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden, Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Bayr. Akademie, Bd. 34, München 1904, p. 103—111. (Vgl. auch J. H. LAMBERT, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik, Bd. I, Berlin 1765, p. 72—83.)

Grundriß die Festlegung der Standlinie und der Hauptachsen gegeneinander. Die Distanzen der Bilder sind beidemal gleich 149 mm,[1]) die Höhen der Standpunkte O_1 und O_2 betragen 1829,5 m und 1800 m. Die (verkleinerte) Figur 143 zeigt den aus den beiden Aufnahmen rekonstruierten kotierten Grundriß



Figur 141 b. Lobbiagletscher. Zweite Aufnahme.

des Gletschers, dessen Originalzeichnung im Maßstabe 1 : 2000 unter der Leitung des Hrn. S. Finsterwalder von Hrn. Hauptmann A. Lammerer im topographischen Bureau des Kgl. Bayr. Generalstabes in München ausgeführt wurde.

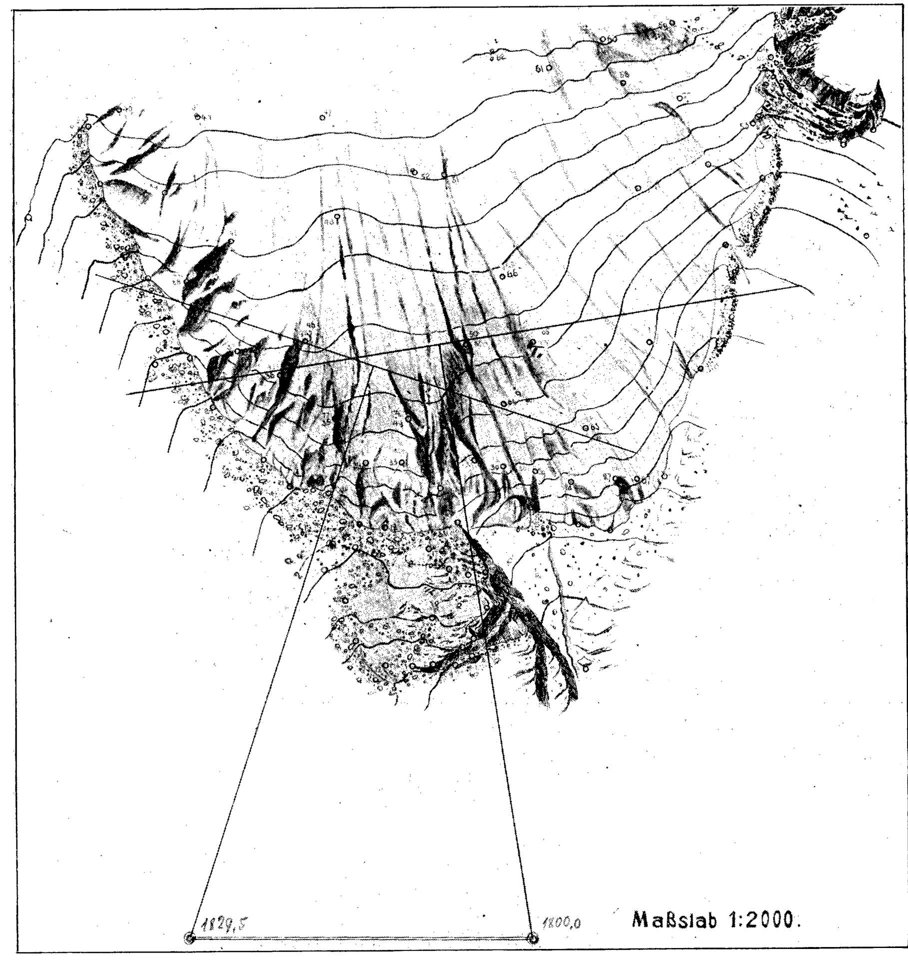


Figur 142.

Zweites Beispiel: Das Bild in Fig. 144 stellt die verti-

1) Dieser Wert der Distanzen gilt für die Originalaufnahmen, von denen die Figuren 141 a, b Verkleinerungen wiedergeben. Für letztere kann man die zugehörigen Distanzen daraus leicht berechnen, daß die Originalbreiten der Figuren 151,5 mm und 150,3 mm betragen. Eine analoge Bemerkung gilt für die Figuren 145 und 146 a, b; deren Originalbreiten betragen bezw. 121,5 mm und 69,5 mm.

kale Aufnahme des 973,5 m hoch gelegenen Eibsees von einem Standpunkte beim Zugspitzenhaus aus (2960 m), wieder mit dem eingezeichneten Horizont und Hauptpunkt, dar. Die Distanz ist, um einer verkleinerten Reproduktion oder einer Verzerrung des



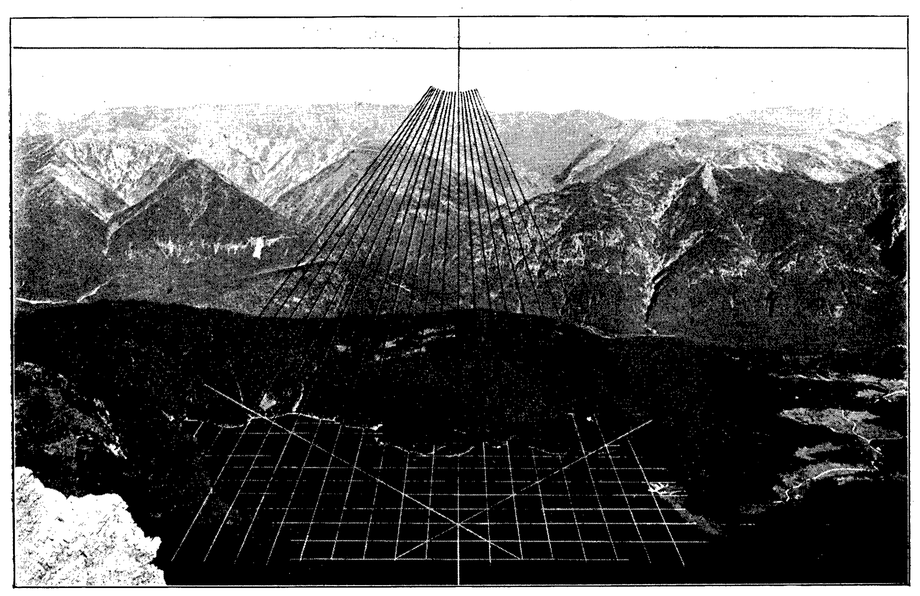
Figur 143. Die Zunge des Lobbiagletschers im Jahre 1895.

Papiers Rechnung zu tragen, daraus zu bestimmen, daß die horizontale Bildweite vom Zentrum aus gemessen 54°,21 beträgt. Bei der Rekonstruktion des Grundrisses der Seeufer handelt es sich um ein ebenes Objekt.[1]) Wie in der Figur 144 ausgeführt ist, überdeckt man am einfachsten das Bild mit einer perspektivischen

1) Vgl. p. 126.

Koordinateneinteilung, die in der horizontalen Ebene der Seeoberfläche gelegen zu denken ist. Hat man die wirkliche Gestalt, die eine quadratische Einteilung darstellt, im Grundriß rekonstruiert, so kann man unmittelbar die Ufer des Sees einzeichnen.

Drittes Beispiel: Aufnahme von Neuötting, vom Luftballon aus 2117 m Höhe bei geneigter Bildebene (Fig. 145). Der Hauptpunkt ist wieder als Schnitt der beiden angedeuteten, zu den Bildseiten parallelen Geraden gegeben, die Distanz beträgt 170 mm



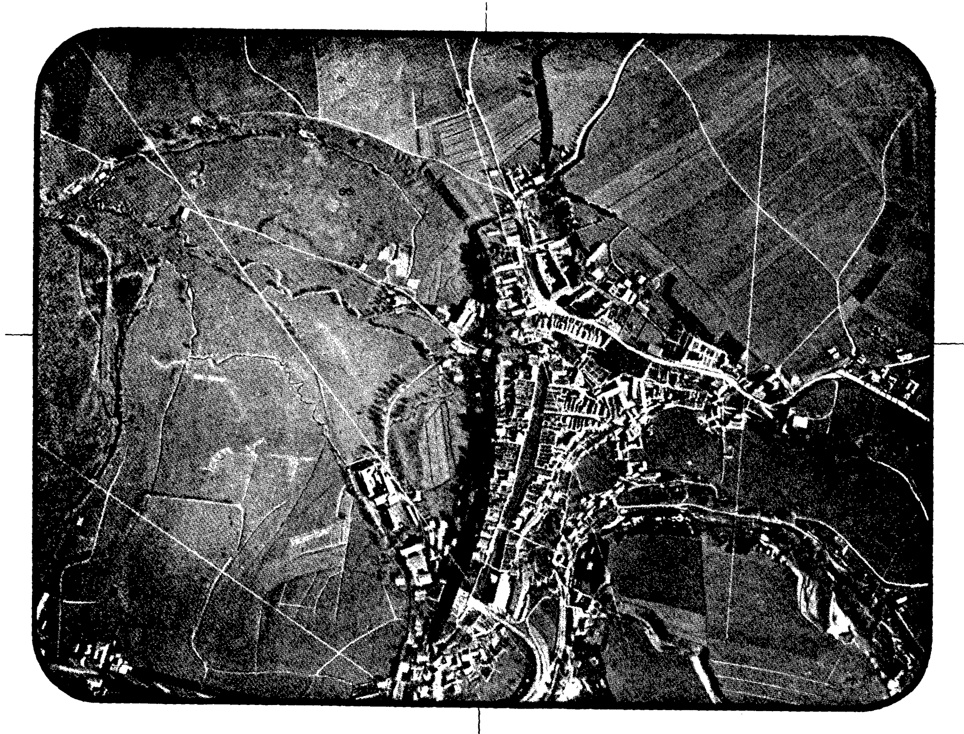
Figur 144. Der Eibsee. Photogrammetrische Aufnahme.

(vgl. Anm. p. 171). An dem Äquator des Ballons waren eine Reihe Lotleinen angebracht[1]), von denen drei in den schräg verlaufenden Linien der Photographie zur Abbildung gekommen sind. Der Schnittpunkt dieser Geraden liefert den Lotfluchtpunkt und, als Punkt des Terrains selbst angesehen, die vertikale Projektion des Ballonortes. Da das Terrain als eben angesehen werden kann, vermag man, wie leicht einzusehen ist, mit Hilfe der angegebenen Daten die erste Orientierung und den Grundriß in einer horizontalen Ebene abgesehen vom Maßstab zu rekonstruieren.

Erwähnen möchte ich ferner, daß es in jüngster Zeit Hrn. S. Finsterwalder gelungen ist, in sehr geschickter und praktisch brauchbarer Weise auch die allgemeinere Aufgabe zu be-

1) S. Finsterwalder, Die geom. Grundl. der Photogr., Anm. p. 29.

wältigen, aus zwei Aufnahmen derselben Gegend von verschiedenen Ballonorten aus, wenn die Hauptpunkte und die Distanzen bekannt sind (ohne Anwendung von Lotleinen, die eben nicht immer sicher zu benutzen sind, weil sie zuweilen vom Winde von der lotrechten Richtung abgelenkt werden) sowohl den Grundriß wie die Höhen der einzelnen Punkte zu rekonstruieren. Um hierbei den Ort der Aufnahme gegen drei bekannte



Figur 145. Neuötting aus 2117 m Höhe, Aufnahme von Dr. C. Heinke, 1898.

Punkte des Objektes festzulegen, benutzt er eine Methode, welche er das „Rückwärtseinschneiden im Raum“ [1]) nennt,

1) Vgl. außer der vorletzten auf Seite 170 genannten Arbeit von Herrn FINSTERWALDER noch:

Das Rückwärtseinschneiden im Raum, Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. 33, p. 591—614, München 1904, und

Bemerkungen zur Analogie zwischen Aufgaben der Ausgleichungsrechnung und solchen der Statik, ebendas., p. 683—689.

Diese Arbeiten geben also praktisch ausführbare Methoden an Stelle der rein theoretischen Lösung der gleichen Aufgabe auf p. 128 f.

der bekannten Methode der ebenen Geodäsie entsprechend. Sein Vortrag vom 3. Jan. 1903: Neue Methode zur topographischen Verwertung von Ballonaufnahmen[1]) in der Sitzung der math.-phys. Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften, in dem er diese Resultate mitteilt, schließt mit den weit ausschauenden Worten: „Noch ehe die Welt mit Meßtischblättern voll umspannt ist, hat sich vielleicht die Aëronautik soweit entwickelt, daß das Vermessungsluftschiff seinen Dienst beginnen kann. Die geometrischen Methoden liegen hierfür bereit."

Auf zwei mit der geodätischen Terrainaufnahme in engster Fühlung stehende spezielle Anwendungsgebiete der Photogrammetrie möchte ich noch hinweisen: die Militärwissenschaft und die Forsttechnik[2]). Im deutsch-französischen Kriege 1870/71 war ein eigenes Feldphotographiedetachement gebildet, mit der Aufgabe, unbekannte Entfernungen oder Grundrisse von Festungsarbeiten, insbesondere bei der Belagerung von Straßburg, durch photographische Aufnahmen zu ermitteln, unter der technischen Leitung des damaligen Reserveleutnants R. Doergens (1901 gestorben als Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Berlin)[3]); doch haben damals die Versuche nicht zu größeren Resultaten geführt, da sehr bald nach der Bildung der Abteilung Straßburg kapitulierte. Gewiß würde aber in einem zukünftigen Kriege die Photogrammetrie zu be-

1) Vgl. p. 170 Anm.

2) Betreffs der Forsttechnik verweise ich nur auf: F. Wang, Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst im Dienste des Forsttechnikers, Laibach 1893, sowie auf die Arbeiten von V. Pollack u. a.

3) R. Doergens, Über die Photogrammetrie und über die Tätigkeit des Feldphotographiedetachements im Kriege 1870/71, Deutsche Photographenzeitung, Weimar 1897. (Vgl. den Nekrolog auf Doergens in den Jahresberichten der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 11, Leipzig 1902, p. 64.) Näheres siehe auch bei

A. Laussedat, La métrophotographie, Paris 1899, p. 34—37.

Die Verwendung der Photographie in der Militärwissenschaft besprechen ferner:

M. Javary, Mémoire sur l'application de la photographie aux arts militaires, Mémorial de l'officier du génie, Paris 1874;

S. Th. Stein, Das Licht im Dienste wissenschaftlicher Forschung, Leipzig 1877 (XI. Kap. Photogrammetrie und Militärphotographie).

M. Kiesling, Die Anwendung der Photographie zu militärischen Zwecken, Halle a/S. 1896;

B. Schulze (Generalmajor und Chef der topographischen Abteilung der Landesaufnahme), Das militärische Aufnehmen, Leipzig 1903, p. 245 ff.

deutender Anwendung gelangen; auch die deutsche Marine hat seit 1881 auf Anregung von Herrn Professor H. W. VOGEL photographische Küstenaufnahmen an Stelle von Zeichnungen mit Vorteil verwendet.

§ 12. Anwendungen in der Geophysik und Astronomie.

Wir gehen nun zur Anwendung der Photogrammetrie in der *Geophysik und Astronomie* über. Die schon genannten Untersuchungen von Herrn S. FINSTERWALDER über Gletschermessungen und seine Ballonaufnahmen für meteorologische Zwecke würden hier ebenfalls zu nennen sein, ebenso wie die vornehmlich in Österreich durchgeführten Arbeiten zum Lawinenverbau. So benutzte Herr V. POLLACK (Oberingenieur der Generaldirektion der österreichischen Staatsbahnen) z. B. das photographische Verfahren bei der Arlbergbahn zur geodätischen Festlegung der Lawinengebiete.[1]) Ganz besonders wichtige, vielleicht gar die einzig brauchbaren Methoden liefert die Photogrammetrie in der Meteorologie für das Studium der sichtbaren Vorgänge in der Atmosphäre, z. B. der Bildung, Höhe und Bewegung der Wolken, von Gestalt und Weg elektrischer Entladungen, wie Blitzen, Nordlichtern, usw., indem man von verschiedenen Stellen aus gleichzeitig oder auch in bestimmten Zeitintervallen Aufnahmen macht. Hierüber wird Herr Kollege E. WIECHERT Ihnen in seinen Vorträgen im Anschluß an die im geophysikalischen Institut ausgeführten Arbeiten noch manche Einzelheiten mitteilen. Die Fig. 146a, b zeigt Ihnen solche dort gemachte Wolkenaufnahmen von zwei in derselben Höhe gelegenen, 520 m voneinander entfernten Standpunkten aus; die beiden Hauptachsen waren senkrecht gegen die Verbindungslinie der Standpunkte gerichtet ($\omega_1 = \omega_2 = 90^0$) und unter 20^0 gegen die Horizontalebene geneigt, während die einander gleichen Distanzen 90 mm betragen (vgl. Anm. p. 171) und die Hauptpunkte in den Mitten der Bilder liegen. Zu weiterem Studium dieser Verhältnisse empfehle ich Ihnen C. KOPPE, Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung, Braunschweig 1896.[2]) Weiter möchte ich Ihre Auf-

1) Vgl. das p. 166 genannte Werk von ED. DOLEZAL, p. 104 ff. und die zahlreichen Arbeiten des Herrn V. POLLACK selbst.

2) Vgl. auch O. JESSE, Untersuchungen über die sogenannten leuchtenden Wolken, Sitzungsberichte der Kgl. Preußischen Akademie zu Berlin 1890

merksamkeit auf die hier ausliegenden Photographieen des Mains bei Frankfurt lenken, die von Herrn Kollegen K. SCHWARZSCHILD im letzten Winter aufgenommen sind, als der Fluß von treibenden Eisschollen bedeckt war (Fig. 147a, b). Die Photographieen sind von derselben Stelle aus im zeitlichen Abstand von 10 Sekunden aufgenommen. Sie gestatten durch Rekonstruktion der Grundrisse einer größeren Reihe von identischen Punkten auf den Schollen der beiden Bilder sowohl die Bewegungsrichtung wie die Geschwindigkeit des Wassers an den verschiedenen Stellen zu bestimmen und damit zu der Hydrodynamik der Flußläufe einen Beitrag zu liefern. Daß



Figur 146 a, b. Photogrammetrische Wolkenaufnahmen.

es sich hier wieder nur um die Rekonstruktion ebener Objekte handelt, ist für unsern geometrischen Standpunkt besonders interessant[1]).

Daß die Photogrammetrie auch in der *Astronomie* ausgedehnte Anwendung findet, ist bekannt. Ich brauche nur an

und 1891, sowie den Bericht über die dort angewandten photogrammetrischen Methoden von Herrn ED. DOLEZAL, Jahrbuch für Photographie 1897. Auch für das Studium des Vogelfluges empfehlen sich diese Methoden.

1) Vgl. p. 126 und die Methode der perspektivischen Koordinaten p. 172 f. Photographische Aufnahmen zum Studium der Wasserströmungen benutzt in ausgedehntem Maße Herr FR. AHLBORN in seiner Arbeit: Über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes, Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, herausgegeben vom Naturwissenschaftlichen Verein in Hamburg, Bd. XVII, 1902, sowie neuerdings auch Herr L. PRANDTL (vgl. dessen Vortrag auf dem diesjährigen internationalen Mathematiker-Kongreß in Heidelberg: Über Flüssigkeitsbewegungen bei kleiner Reibung).



Figur 147a. Der Main bei Frankfurt. Erste Aufnahme.



Figur 147b. Der Main bei Frankfurt. Zweite Aufnahme.

das 1897 auf der Konferenz in Paris in die Wege geleitete Unternehmen zu erinnern, das ganze Himmelsgewölbe auf photographischem Wege in genauen Karten festzulegen, eine Aufgabe, zu deren Lösung eine Reihe über die ganze Erde verteilter Sternwarten sich verbunden hat.[1]) Wäh-

1) Vom Observatorium in Potsdam wurden bereits 3 Bände, in Helsingfors 1 Band veröffentlicht, ebenso haben Frankreich und die in seinen Kolonieen be-

rend sonst in mühsamer Arbeit mit dem Fernrohr die Koordinaten jedes einzelnen Sternes zu messen waren, liefert das photographische Bild die Möglichkeit, mit einem Male sie für alle Sterne des Gebietes festzulegen. Hierbei kommt noch der weitere Vorteil hinzu, daß auch solch lichtschwache Sterne, die mit den stärksten Instrumenten nicht sichtbar sind, auf der Platte noch ihren Aufenthalt verkünden. Auch zur Polhöhenbestimmung, sei es zum Zweck der Breitenbestimmung eines Ortes oder des Studiums der Polschwankungen, zur Entdeckung von Planeten durch stereoskopische Aufnahmen, zur Beobachtung von Venusdurchgängen durch die Sonnenscheibe, von Sonnenfinsternissen und ähnlichen astronomischen Erscheinungen ist die photogrammetrische Methode vielfach benutzt worden[1]).

Auf eine Reihe kleinerer Anwendungen der Photogrammetrie möchte ich schließlich noch hinweisen. Ist doch ebenfalls ein photogrammetrisches Verfahren darin zu erkennen, wenn der Chirurg durch zwei Röntgenaufnahmen die Lage eines Eisensplitters im menschlichen Körper festzustellen sucht, oder wenn der Ingenieur die Durchbiegung einer Brücke bei

findlichen Observatorien, sowie das in Greenwich mit der Veröffentlichung begonnen. Vgl. in mathematischer Hinsicht insbesondere:

W. Zurhellen, Darlegung und Kritik der zur Reduktion photographischer Himmelsaufnahmen aufgestellten Formeln und Methoden, Dissertation, Bonn 1904;

J. Scheiner, Die Photographie der Gestirne, Leipzig 1897, p. 153 ff.

1) Vgl. K. Schwarzschild, Über photographische Breitenbestimmung mit Hilfe eines hängenden Zenitkollimators, Astr. Nachr. Bd. 164, 1903—1904, p. 1—6, und: Über Breitenbestimmung mit Hilfe einer hängenden Zenitkamera, daselbst p. 177—182, sowie: Über photographische Ortsbestimmung, Eders Jahrbuch der Photographie und Reproduktionstechnik, 1903, p. 207 ff. Näheres erfahren Sie noch in seinen Vorträgen (vgl. diesen Sammelband, I. Teil, p. 157). Ferner:

C. Runge, Über die Bestimmung der geographischen Länge auf photographischem Wege, Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1893, Bd. 22;

H. G. Schlichter, Eine neue Präzisionsmethode zur Bestimmung der geographischen Länge auf dem festen Lande, Verhandlungen des zehnten deutschen Geographentages, Berlin 1893;

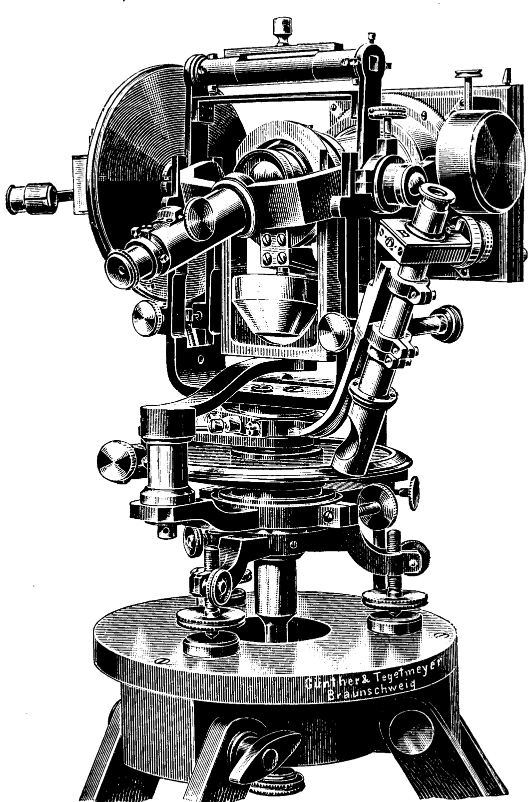
C. Koppe, Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung, Braunschweig 1896, p. 30—40 (Geographische Ortsbestimmung).

M. Wolf, Die Verwendung des Stereokomparators in der Astronomie, Astr. Nachr. Bd. 157, 1902, p. 81 (vgl. Anm. 2 p. 181).

Belastung durch Vergleichung der vorher und nachher aufgenommenen Bilder ermittelt. Auf die Anwendung der Photogrammetrie in der Mikroskopie und Kristallographie ist von Hrn. S. Finsterwalder in seinem oft genannten Referat (p. 20—22) hingewiesen.

§ 13. Die verschiedenen photogrammetrischen Apparate.

Es ist natürlich, daß den verschiedenen Zwecken und Neigungen des einzelnen Forschers entsprechend nun auch eine große Reihe photogrammetrischer Apparate konstruiert sind, die auch in der Literatur ausführlich beschrieben werden. So haben in Deutschland Meydenbauer, Koppe, Finsterwalder ihre eigenen Apparate gebaut. Den Phototheodoliten von Hrn. C. Koppe haben Sie schon vor einigen Tagen bei Besichtigung meines Institutes näher kennen zu lernen Gelegenheit gehabt.[1]) Seine Eigenart besteht darin, daß einmal in ihm ein photographischer Apparat und ein Theodolit vereinigt sind, wenn man ihn zum Zwecke der Aufnahme und der dabei nötigen Messungen im Gelände zusammensetzt, daß er sodann aber auch in anderer Anordnung die entwickelten Platten mit einem Fernrohr direkt auszumessen gestattet. Diese zweite Zusammenstellung



Figur 148. Phototheodolit von Koppe.

1) Wegen seiner Beschreibung vgl. P. Kahle, Die neuen Phototheodoliten von Prof. Koppe aus der Werkstätte für Präzisionsmechanik von O. Günther in Braunschweig, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1897, p. 33—47, sowie die schon genannten Werke von Hrn. Koppe selbst (siehe p. 168 und 176).

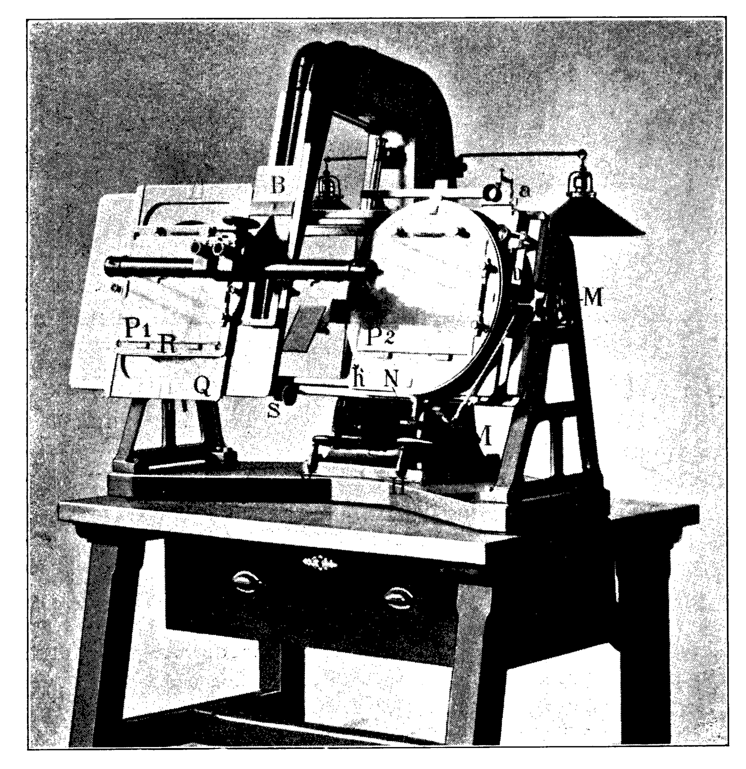
des Apparates wird durch die Figur 148 gegeben. Um möglichst genaue Resultate zu erzielen, die den durch die gewöhnlichen geodätischen Methoden erhaltenen gleichwertig sind, lassen sich eben, wie Hr. C. KOPPE bemerkt[1]), die photographischen Abzüge auf Papier wegen der Verzerrungen, die dieses beim Fixieren und Wässern erleidet, nicht benutzen, sondern nur die Negative selbst. Man wird daher durch Messungen auf den Platten mit Hilfe einer geeigneten Vorrichtung, wie sie eben der Phototheodolit von Hrn. KOPPE besitzt, die Koordinaten der einzelnen Bildpunkte bestimmen und dann der weiteren Rechnung oder der graphischen Behandlung zugrunde legen.

Was die Ausmessung der von zwei Standpunkten erhaltenen photographischen Platten desselben Objektes betrifft, so möchte ich auf den in jüngster Zeit von Hrn. C. PULFRICH konstruierten Zeißschen Stereokomparator hinweisen, welcher auf einer Fortbildung des beim „stereoskopischen Entfernungsmesser" benutzten Gedankens beruht (Fig. 149). Des Näheren sei besonders, was die mannigfache Verwendungsart anlangt, auf den Prospekt und die Schriften der Firma Carl Zeiß in Jena verwiesen, die von ihr zu beziehen sind.[2])

1) C. KOPPE, Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst, Weimar 1889, p. 16 und p. 67—68.

2) Nämlich C. PULFRICH: Über die bis jetzt mit dem Stereokomparator auf astronomischem Gebiete erhaltenen Versuchsergebnisse (Vortrag auf der Astronomenversammlung in Göttingen 1902), Sonderabdruck aus V.-J.-S. der Astronomischen Gesellschaft, Jahrgang 37, Heft 3); Über die Konstruktion von Höhenkurven und Plänen auf Grund stereophotogrammetrischer Messungen mit Hilfe des Stereokomparators, Sonderabdruck aus der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1903, Heft 2; Über einen Versuch zur praktischen Erprobung der Stereophotogrammetrie für die Zwecke der Topographie, Sonderabdruck aus der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1903, Heft 11; Über die Anwendung des Stereokomparators für die Zwecke der topographischen Punktbestimmung, Sonderabdruck aus der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1904, Heft 2; Neue stereoskopische Methoden und Apparate für die Zwecke der Astronomie, Topographie und Metronomie, Berlin 1903. I. Lieferung; ferner A. VON HÜBL: Die Stereophotogrammetrie, Separatabdruck aus den „Mitteilungen des k. u. k. militärgeographischen Instituts", Bd. 22, Wien 1903, und den Prospekt der Firma C. ZEISS über Stereokomparatoren nach Pulfrich, I. Ausgabe 1903. Auf der nächsten Naturforscherversammlung in Breslau will Herr C. PULFRICH noch weitere hierher gehörende Mitteilungen machen („Die stereo-photogrammetrische Küstenvermessung vom Schiff aus" und „Über eine neue Art der Vergleichung photographischer Sternaufnahmen").

Will man jedoch für den Unterricht in der darstellenden Geometrie das Gebiet der Photogrammetrie gewinnen, wie es der wesentliche Zweck meines Vortrages sein soll, so wird man natürlich auf die Benutzung solcher weitreichender messender Hilfsmittel, wie des Phototheodoliten oder des Stereokomparators, verzichten müssen, die, wenn sie den Zweck größtmöglicher Genauigkeit erfüllen sollen, sehr kostspielig sind und gewiß

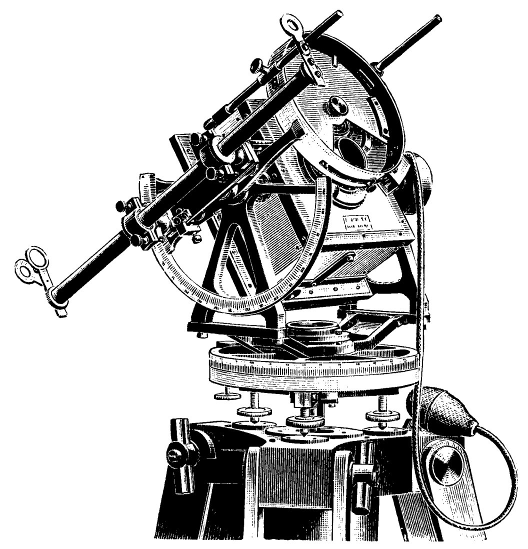


Figur 149. Zeißscher Stereokomparator von Pulfrich.

nicht dem Schüler in die Hand gegeben werden können. Die rein graphischen Methoden sind für die Zwecke des Unterrichts vollkommen ausreichend, sodaß diese Beschränkung eher Vorteile mit sich bringt, wie denn ja auch im Institut des Hrn. A. Meydenbauer die Rekonstruktionen stets rein graphisch ausgeführt werden.

In den Vorträgen des Hrn. Kollegen E. Wiechert werden Sie ferner noch die von ihm konstruierten Phototheodoliten für die p. 176 erwähnten Wolkenaufnahmen von

zwei mehrere hundert Meter entfernten Standpunkten aus (Fig. 150), sowie bei Besichtigung der Sternwarte den dort von Hrn. K. SCHWARZSCHILD benutzten Apparat kennen lernen. Ich möchte aber vor allen Dingen noch ein Wort darüber sagen, wie ich meinen eigenen gewöhnlichen photographischen Apparat zu einer brauchbaren „photogrammetrischen Kamera“ ausgebildet habe. Möglichst nahe unter der Decke eines nicht zu niedrigen Zimmers wurde horizontal ein auf einem Zeichenbogen gezeichnetes Achsenkreuz angebracht, von dessen Mittelpunkt aus ein Lot herabhing. An den hintern Rahmen des Apparates wurden ferner zunächst provisorisch vier Marken (Metallblättchen mit einem Einschnitt) angebracht, die möglichst dicht die Mattscheibe berührten



Figur 150. Phototheodolit von Wiechert.

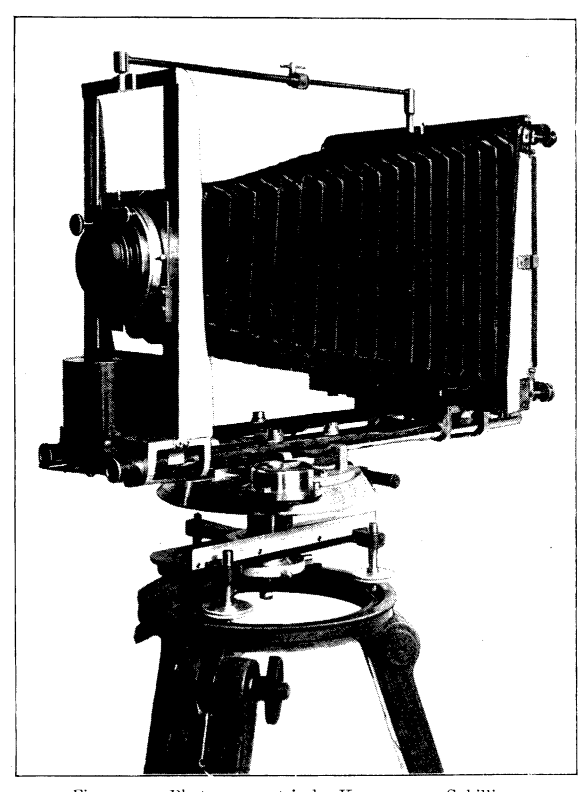
und bei der photographischen Aufnahme sich auf der Platte abbilden sollten (vgl. Fig. 95 p. 111). Der Apparat wurde sodann mit der Öffnung des Objektivs nach oben nahe auf dem Fußboden horizontal aufgestellt, und zwar so, daß das Lot die Mitte des Objektivs traf, nachdem das Objektiv vorher schon auf die Entfernung vom Achsenkreuz eingestellt und der die Mattscheibe tragende hintere Teil mit dem vorderen, dem Objektivbrett, so fest verbunden war, daß ihr Abstand bei der Umlegung der Kamera sich nicht änderte. Dann wurde eine Aufnahme des Achsenkreuzes gemacht. Die entwickelte Platte zeigte in dem Bilde der Achsenkreuzmitte den genauen Ort des Hauptpunkts in seiner Lage zu den beiden Verbindungslinien der Bilder der gegenüberliegenden Marken an. Hiernach ließen letztere sich so in die definitive Lage bringen, daß der Schnittpunkt der genannten Verbindungslinien genau mit dem Hauptpunkt zusammenfiel. Mit einer zweiten Aufnahme wurde

die ausgeführte Korrektion noch kontrolliert. Diese Methode ist deswegen für die Bestimmung des Hauptpunktes genügend genau, weil eine Abweichung des Lotes vom Mittelpunkt des Objektivs nur eine solche Abweichung des Hauptpunkts von der richtigen Lage bewirken würde, daß sie zu jener sich verhält wie die Entfernung der Mattscheibe vom Objektivmittelpunkt zu der Entfernung des letzteren vom Achsenkreuz. Ist dann noch die Brennweite des Objektivs bekannt, so hat man die vollständige Einrichtung zur Bestimmung der ersten Orientierung für vertikale Aufnahmen nach den Sätzen 15 und 16, falls man noch eine Libelle für die vertikale Aufstellung der Mattscheibe und, wenn man will, noch je eine Einteilung an geeigneter Stelle hinzufügt, um die Abweichung von der Brennweite und die Verschiebung des Objektivbretts nach oben oder unten bequem ablesen zu können.

Um gerade für die Behandlung der Photogrammetrie im Unterricht der darstellenden Geometrie die gewünschten Beispiele in möglichst vollkommener Weise zu erhalten, habe ich selbst für unser Institut eine mit allen Feinheiten ausgestattete photogrammetrische Kamera in der mechanischen Werkstatt von Günther und Tegetmeyer in Braunschweig anfertigen lassen (Fig. 151).[1]) Ich möchte von einer näheren Beschreibung, die hier doch zu weit führen würde, absehen und nur folgendes bemerken: Der Apparat gestattet, Horizontalwinkel in bequemer Weise zu messen, die sechs verschiedenen Brennweiten des Kollinearsatzes III von Voigtländer und Sohn zu benutzen, das Objektiv besonders nach oben weit zu verschieben, Platten von 13×18 cm sowohl im Hoch- wie Querformat zu verwenden; auch läßt sich der obere Teil allein (ohne den Theodolitunterbau) auch auf einem gewöhnlichen Stativ benutzen. Endlich läßt sich durch eine einfache Verschiebung die Vertikalachse des Theodolitunterbaus bei der Aufnahme an den Ort des Objektivhauptpunktes bringen, von welch letzterem aus die aus dem photographischen Bilde abzuleitenden Winkel rechnen. Letzteres hat den Zweck, die für das Zeichnen unbequemen Korrektionen zu vermeiden, die besonders

1) Daß unsere Sammlung diesen wie den Apparat von Herrn C. Koppe anschaffen konnte, verdanken wir der Bewilligung von besonderen Mitteln seitens der Kgl. Regierung und der „Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Mathematik und Physik“, wie ich an dieser Stelle gern hervorheben möchte.

bei Aufnahmen von nahen Objekten, wie von Gebäuden, dann nötig wären, wenn etwa die Horizontalwinkel von einer Lage der Theodolitachse aus gemessen würden, die nicht durch den Objektivhauptpunkt der photographischen Aufnahme ginge.



Figur 151. Photogrammetrische Kamera von Schilling.

Die instrumentelle Seite der Photogrammetrie gibt Anlaß zu einer großen Reihe von Nebenuntersuchungen, die für die Abschätzung der Genauigkeit natürlich von höchstem Werte sind. Abgesehen von dem Bau der Apparate und ihrer Hilfsteile selbst handelt es sich hier um die Untersuchung der photographischen Objektive nach verschiedenen Richtungen hin, die Bestimmung ihrer Brennweite und der Konstanten des benutzten Apparates, die Ausbildung einer Fehlertheorie für photogrammetrische Messungen u. dgl. Wer sich über diesen Teil der wissenschaftlichen Instrumentenkunde orientieren will, wird eine übergroße Literatur zur Verfügung finden.

Der vielseitigen Anwendung und den zahlreichen photogrammetrischen Apparaten entsprechend ist die Literatur der Photogrammetrie, aus der ich nur die wichtigsten Arbeiten anführen konnte, überhaupt eine überaus ausgedehnte. Jeder wird gewiß von der Fülle der erschienenen Abhandlungen über unsern Gegenstand überrascht sein, wenn er einen Blick auf die übersichtlich nach Ländern und der Zeitfolge geordnete Zusammen-

stellung bei P. Paganini, Fotogrammetria (Manuali Hoepli, p. 275—288) wirft.[1]) —

§ 14. Ausblick auf höhere geometrische Probleme und Schlußbemerkung.

Sie werden gewiß zum Schluß auch einen Ausblick auf höhere geometrische Probleme wünschen, zu denen die theoretische Ausgestaltung der Photogrammetrie Anlaß gibt. Ich kann hier auf das schon oft zitierte Referat von Hrn. S. Finsterwalder und die dort angeführte Literatur verweisen und Ihnen zum Studium besonders die bis in die jüngste Zeit fortgesetzten interessanten Untersuchungen von Hrn. G. Hauck empfehlen, welche die Photogrammetrie mit anfangs unabhängig davon entwickelten Theorieen der projektiven Geometrie in Verbindung setzen.[2]) Im Anschluß an den Satz (31) auf p. 128 möchte ich hier wenigstens folgende Sätze zusammenstellen, wegen der Literatur aber auf das Referat von Hrn. S. Finsterwalder verweisen:

(39) Ohne daß die innere Orientierung[3]) gegeben ist, bestimmen zwei Photographieen und fünf Maße (d. h. die wahren Längen von fünf Strecken des Objektes) oder drei Photographieen und drei Maße oder vier Photographieen und ein Maß das Objekt eindeutig (von seiner Orientierung gegen die Vertikale und die Nord-Süd-Richtung abgesehen).

1) Andere Zusammenstellungen geben:
Fr. Steiner, l. c. p. 170—171,
Ed. Dolezal, l. c. p. 107—114,
C. Koppe, Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst, Weimar 1889, p. IX—XI.

2) G. Hauck, Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme. I. Artikel: Neue Konstruktionen der Perspektive und Photogrammetrie, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XCV (1883); II. Artikel, ebendas., Bd. XCVII (1884); III. Artikel, ebendas., Bd. XCVIII (1885); IV. Artikel, ebendas., Bd. CVIII (1891); V. Artikel, ebendas., Bd. CXI (1893); ferner: Über uneigentliche Projektionen, Sitzungsber. der Berliner Mathematischen Gesellschaft, I. Jahrgang, Leipzig 1902, p. 34—39; Über die Beziehungen zwischen drei Parallelprojektionen eines räumlichen Systems, Jahresber. der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. XI, Leipzig 1902, p. 265—268.

Vgl. auch Gino Loria, Fondamenti Geometrici della Fotogrammetria, Giornale di Matematiche di Battaglini, Volume XLI, Napoli 1903.

3) Vgl. Anm. 1 p. 100.

Daß die Hilfsaufgabe, deren strenge Lösung der letzte Fall bedingt, nämlich einen Kegelschnitt zu konstruieren, der acht Raumgerade trifft, 92 Lösungen gestattet, läßt allein schon erkennen, wie die allgemeinen theoretischen Untersuchungen keine praktische Anwendung finden können.

(40) Eine Photographie ohne innere Orientierung und die Kenntnis der gegenseitigen Lage von sechs Objektpunkten bestimmen die innere Orientierung und den Standpunkt gegen das Objekt.

(41) Eine Photographie mit innerer Orientierung und die Kenntnis der gegenseitigen Lage von drei Objektpunkten bestimmen den Standpunkt gegen das Objekt. (Die Lösung wird einfacher, wenn einer der drei Objektpunkte im Unendlichen liegt.)

(42) Sind außer einer Photographie ohne innere Orientierung sieben Punkte im Grundriß und auf dem Bilde gegeben, so kann man den Grundriß des Standpunktes bestimmen.

(43) Ist außer der Photographie noch der Lotfluchtpunkt auf ihr gegeben, so genügen fünf Punkte im Grundriß und die Kenntnis ihrer Bilder zur Rekonstruktion des Standpunktgrundrisses („Problem der fünf Punkte“).[1]) —

Wir stehen am Schlusse unserer Betrachtungen. Es sollte mich freuen, wenn es mir gelungen ist, der Photogrammetrie auch in Ihrem Kreise neue Freunde zu gewinnen, in Übereinstimmung mit dem Zielpunkt meines letzten Vortrages, die Photogrammetrie besonders dem Unterricht in der darstellenden Geometrie zuzuführen. Diesem Zwecke sollten gerade die elementaren Methoden dienen, deren Entwicklung den Mittelpunkt unserer Betrachtungen bildete. Sind schon an der Ausbildung der allgemeinen Theorie der Photogrammetrie und der für ihre praktische Anwendung nötigen Apparate die verschiedensten Wissenszweige beteiligt, wie die Photographie, Physik, Geodäsie, darstellende Geometrie, Instrumentenkunde, so wird das Interesse an diesem Zweige der angewandten Mathematik noch mehr durch die überaus mannigfachen Anwendungsgebiete selbst, die wir kennen lernten, erhöht.

1) Vgl. die Anm. 2 auf Seite 129.

Meine Vorträge möchte ich mit der Hoffnung schließen, daß Sie alle mit mir in der Überzeugung einig sind: Die angewandte Mathematik überhaupt, wie die angewandte darstellende Geometrie im besondern bildet eine reiche, nie versagende Quelle der Anregung für Lehrer und Schüler unserer höheren Schulen und ist in erster Linie mit berufen, das in früherer Zeit oft ausgesprochene Wort zu widerlegen, die Mathematik sei eine trockene, unbrauchbare Wissenschaft, die zu verstehen überdies nur wenige berufen seien.[1])

1) Vgl. A. PRINGSHEIM: Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik, Festrede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München zur Feier ihres 145. Stiftungstages am 14. März 1904, München 1904.

Anhang.

Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht?[1])

Von Friedrich Schilling.

Ich möchte mir erlauben, Ihnen unseren Projektionsapparat und seine speziellen Einrichtungen für den mathematischen Unterricht vorzuführen, in der Hoffnung, manche von Ihnen dazu anzuregen, auch Ihrerseits in den mathematischen Stunden von den Vorteilen des Projektionsapparates Gebrauch zu machen. Zwar werde ich meine Ausführungen wegen der mir hier zur Verfügung stehenden Projektionsbilder mehr an unseren Universitätsunterricht anlehnen müssen, aber Sie werden leicht erkennen, daß ganz analoge Betrachtungen auch für die Benutzung des Projektionsapparates an den höheren Schulen Geltung haben. Von der Einrichtung des Projektionsapparates möchte ich nur wenig sprechen; ich kann darauf hinweisen, daß von Hrn. Professor O. Behrendsen Ihnen ja später noch die verschiedensten Apparate und ihre Einrichtungen, besonders auch für die Anwendung in der Physik, vorgeführt werden. Unser Apparat besteht im wesentlichen aus vier Teilen: einer elektrischen Lampe von Schuckert mit Handregulierung zum Zentrieren des Lichtbogens, den Kondensorlinsen, dem Diapositivträger und dem Objektiv.

Mein Vortrag wird in zwei Abschnitte zerfallen: einmal soll er die verschiedenen Methoden der Projektion für den mathematischen Unterricht, sodann die verschie-

1) Leider ist es der Natur der Sache nach nur möglich, diesen besonderen Vortrag, der durch mehr als hundert Projektionsbilder unterstützt wurde, im Auszuge wiederzugeben.

denen Verwendungsarten des Apparates in didaktischer Hinsicht Ihnen vor Augen führen.

I. Was den ersten Punkt betrifft, so haben wir für den mathematischen Unterricht eine große Reihe spezieller Methoden zum Projizieren ausgebildet. Am einfachsten ist es, wie bekannt, gewöhnliche Diapositive zu benutzen, die auf photographischem Wege hergestellt werden, für unsere Zwecke besonders Photographieen von Zeichnungen. Unsere Diapositive haben das Format von 9×12 cm; meist lassen wir sie hier anfertigen zum Preise von 1,35 M. für das Stück. Doch besonders bei Diapositiven von Zeichnungen zeigt sich, daß die feinen Linien zu wenig sichtbar sind; es ist leicht, diesem Übelstande dadurch abzuhelfen, daß man die Linien mit gewöhnlicher Tusche nachzieht. Man hat hierbei den Vorteil, auch farbige Tusche verwenden und dadurch einzelne Teile der Zeichnung besonders hervorheben zu können. Auch haben wir wiederholt ganze Flächen mit durchsichtigen Farben angelegt.[1])

Eine andere sehr einfache Methode, Projektionsbilder herzustellen, besteht darin, daß man Glasscheiben, die mit einer Gelatineschicht oder mit Negativlack oder auch mit verdünntem Gummi arabicum überzogen sind, benutzt, um direkt auf ihnen zu zeichnen. Am bequemsten stellt man solche Platten sich her, indem man gewöhnliche photographische Glasplatten, ohne sie zu belichten, entwickelt, wenn man es nicht vorzieht, die Glasscheiben mit einem der genannten Stoffe selbst zu beziehen. Natürlich kann man auch hier wieder Linien mit farbiger Tusche zeichnen und Flächen mit Farben anlegen.

Noch einfacher ist es, Gelatineblättchen, die jede Papierhandlung gleich in richtiger Größe besorgt, zu benutzen, um auf ihnen direkt zu zeichnen. Beim Projizieren werden dann diese Blättchen in einen Rahmen gelegt. Dieser besteht aus zwei Glasscheiben, die in eine dünne Metallumrandung gefaßt und an ihrer Längsseite durch ein Scharnier verbunden sind. Diese letzte Methode empfiehlt sich wegen ihrer Billigkeit besonders dann, wenn es sich darum handelt, Bilder für einen ge-

---

1) Wir haben dazu sogenannte Kölitz-Farben benutzt, die man in den größeren Handlungen für photographische Artikel erhält; auch die Diapositivfarben der „Neuen photographischen Gesellschaft" in Berlin sind sehr geeignet.

legentlichen Zweck herzustellen oder auf Reisen mitzunehmen, da die Blättchen leicht und unzerbrechlich sind.

Ferner kann ich Ihnen einige Bildchen projizieren, welche die Bewegung der Spitze eines Kreisels darstellen; interessant ist daran, daß der Kreisel selbst bei seiner Bewegung sie auf einer mit Ruß bezogenen Glasplatte eingeschrieben hat.[1])

Um Beispiele zu geben, wie man die Methode der Diapositive bedeutend vervollkommnen kann, will ich Ihnen noch einige bewegliche Diapositivmodelle zeigen. Das erste stellt die kinematische Erzeugung der Epitrochoiden (cyklischen Kurven) dar: Ein kleines Zahnrad aus Zelluloid rollt, wie Sie sehen, auf einem eben solchen ab und beschreibt mit dreien seiner Punkte die verschlungene, gestreckte und gespitzte Epitrochoide. Ein zweites Diapositivmodell zeigt in ähnlicher Weise die Erzeugung der gewöhnlichen Cykloide als Evolute einer andern kongruenten, deren Scheitel in den Spitzen der ersten liegen. Sie sehen in dem Projektionsbilde deutlich, wie ein Faden auf der zuletzt genannten Cykloide abrollt und mit einem seiner Punkte die erste beschreibt. Noch ein drittes bewegliches Projektionsmodell kann ich Ihnen vorführen, welches die Einrichtung und den Gebrauch der Rechentafel von Hrn. R. Proell veranschaulichen soll.

Endlich möchte ich noch auf eine andere Verwendungsart des Projektionsapparates hinweisen: Man kann direkt Drahtmodelle[2]) von Körpern in den Lichtkegel des Apparates hineinhalten, sodaß ihr Schattenbild auf den Projektionsschirm fällt. Sie sehen in solcher Weise die verschiedensten Projektionen der regulären Körper und ihre Übergänge ineinander, ferner solche von einem Kreise mit 2 senkrechten Durchmessern und einem in deren Endpunkten berührenden umbeschriebenen Quadrate, von einer Schraubenlinie, deren Schatten sehr schön die drei Formen der gestreckten, gespitzten und verschlungenen Projektionskurven zur Anwendung bringt usw. Im Grunde leistet der Projektionsapparat hier dasselbe, wie das nicht immer zur Verfügung stehende Sonnenlicht.

II. Was nun ferner die verschiedenen Verwendungs-

1) Vgl. F. Klein und A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Heft 3, Leipzig 1903, p. 622.

2) Diese Verwendungsart ist in ausgedehntem Maße von Hrn. Hermann Wiener in Darmstadt ausgebildet worden.



arten des Apparates beim Unterricht angeht, so will ich zunächst folgendes hervorheben: Es ist oft zweckmäßig, Aufgaben, die man zeichnen will, vorher zu projizieren, um an den Projektionen die Methoden zu erklären, die man beim Zeichnen ausführen will. Zum Beispiel wird es gut sein, die Figur eines Dodekaeders fertig vor Augen zu haben, ehe man daran geht, sie im einzelnen an der Tafel zu zeichnen. Ausdrücklich will ich betonen, daß auch nicht im geringsten durch Benutzung des Projektionsapparates das Zeichnen der Figuren an der Wandtafel eine Einschränkung erfahren und der Vorteil, welchen das allmähliche Entstehen der Figuren darbietet, beeinträchtigt werden soll. Das Projektionsbild gestattet ferner, oft nach Ausführung der Zeichnung leicht Erweiterungen der Figur andeuten zu können, deren Durchführung an der Wandtafel wegen der dazu nötigen Zeit nicht möglich wäre. Hat man z. B. das Dodekaeder fertig gezeichnet, so kann man an dem Projektionsbilde noch erklären, wie man einen Schnitt durch dasselbe legen kann. In ganz ähnlicher Weise wird es oft erwünscht sein, zur Ergänzung der an der Tafel gezeichneten Aufgabe ähnliche Aufgaben, die gleiche Methoden erfordern, wenigstens im Projektionsbilde den Schülern vorführen zu können. Zum Beispiel wird man auf andere Darstellungen des Dodekaeders als gerade die gezeichnete und auf die verschiedenen Darstellungen des Ikosaeders, die ja ganz gleiche Methoden erfordern, oder auf Darstellungen der verschiedensten Kristalle, von denen man vielleicht das eine oder das andere gezeichnet hat, hinweisen können. Oft ist es nötig, an früher gezeichnete Aufgaben zu erinnern, und dabei ist es wünschenswert, die fertige Figur noch einmal vor Augen zu haben. Ich erwähne, daß man z. B. für die Durchdringung von Prisma und Pyramide gern an die Durchdringung zweier Dreiecke, für die Durchdringung von Zylinder und Kegel an die Durchdringung von Prisma und Pyramide erinnert. Mit Leichtigkeit kann man zu diesem Zwecke die in Diapositiven vorhandenen früheren Figuren wieder vor Augen führen. Ferner bietet der Projektionsapparat besonders bei solchen Vorlesungen, die mit Übungen verbunden sind, die Annehmlichkeit, einzelne der für Übungen bestimmten Vorbemerkungen an ein Projektionsbild anknüpfen zu können. In meinen Vorlesungen über darstellende Geometrie habe ich z. B. schon in der ersten Stunde

diese Vorteile empfunden, um die Einteilung des Zeichenbogens durch Projektion eines fertigen Blattes, die Benutzung der autographierten Übungsblätter und ähnliches in solcher Weise besprechen zu können.

Ich nenne weiter als Beispiele zum Projizieren Literatur- und Formelzusammenstellungen, Abbildungen aus Büchern, deren Vorführung oft zweckmäßig oder gar notwendig ist, um sich überhaupt verständlich machen zu können. Ähnliche Zwecke wie mit Projektionsbildern verfolgt man ja auch mit der Benutzung von mathematischen Modellen. Doch bei einem größeren Zuhörerkreise erweisen sich letztere oft als zu klein; ich habe es wiederholt als angenehm empfunden, an den Projektionsbildern, die durch Photographieren der Modelle gewonnen sind, die Eigenschaften der letzteren allgemein verständlich auseinandersetzen zu können, um es dann dem Einzelnen zu überlassen, sie nachher an den Modellen selber näher zu studieren. (Beispiele: Kreisschnitte der Flächen zweiten Grades mit den Nabelpunkten; Konstruktion der Zahnräder, Polarplanimeter u. dgl.). Handelt es sich nun gar um große technische Anwendungen, an die man beim Unterricht zur Belebung der theoretischen Ausführungen erinnern möchte, so ist der Projektionsapparat gradezu unentbehrlich. Denn wie ganz anders wirkt diese Erwähnung beim Vortrag, wenn sie von einem anschaulichen Bilde begleitet ist (Königsche Schnellpresse als Beispiel für die Geradführung in der Kinematik; Bahnhofshallen, Brückenanlagen und andere große Eisenkonstruktionen als Beispiele für die Fachwerke in der graphischen Statik usw.).

Habe ich bisher die vielen Projektionsbilder, die ich Ihnen vorführen konnte, aus dem Gebiete der Fächer, die sich auf geometrisches Zeichnen beziehen, gewählt, so will ich doch nicht unterlassen, auch auf die Benutzung des Projektionsapparates in andern mathematischen Disziplinen hinzuweisen. Ich möchte Ihnen noch eine Reihe Projektionsbilder aus der projektiven und der analytischen Geometrie, der Flächentheorie, der Differential- und Integralrechnung vorführen, um zu zeigen, daß auch auf diesen Gebieten die Verwendung des Projektionsapparates wesentliche Vorteile darbietet. (Beispiele: Projektionsbilder zur angenäherten Darstellung von Funktionen durch Benutzung der ersten Glieder in der Entwicklung der Taylorschen Reihe, sowie

das Analoge bei der Entwicklung der Funktionen in Fouriersche Reihen.)[1])

Aus meinen bisherigen Ausführungen dürfte zur Genüge hervorgehen, welche Vorteile die Verwendung des Projektionsapparates gerade auch beim mathematischen Unterricht darbietet. Zweifellos gestattet er eine außerordentliche Belebung des Vortrages, die besonders in Rücksicht darauf wünschenswert sein dürfte, daß auch in den höheren Schulen die Anwendungen der Mathematik mehr als bisher herangezogen werden sollen. Die Benutzung des Apparates verschafft dem Vortragenden selbst eine nicht unwesentliche Erleichterung der Ausdrucksweise, wenn er seinen Vortrag an ein Projektionsbild anlehnen kann, und Hand in Hand damit eine größere Möglichkeit, sich den Schülern leicht verständlich zu machen. Sie gestattet die Erwähnung und Besprechung von Dingen, die sonst nur unvollkommen oder überhaupt nicht vorgetragen werden könnten; sie ermöglicht nicht unbedeutende Zeitersparnis, was besonders bei gelegentlichen Vorträgen durch Projektionen von Formeln und Figuren wünschenswert ist. Meine eigenen Vorträge z. B. über „die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über Photogrammetrie“ würden mir gewiß nicht möglich gewesen sein, wenn ich nicht in ausgedehnter Weise von dem Projektionsapparate hätte Gebrauch machen können.

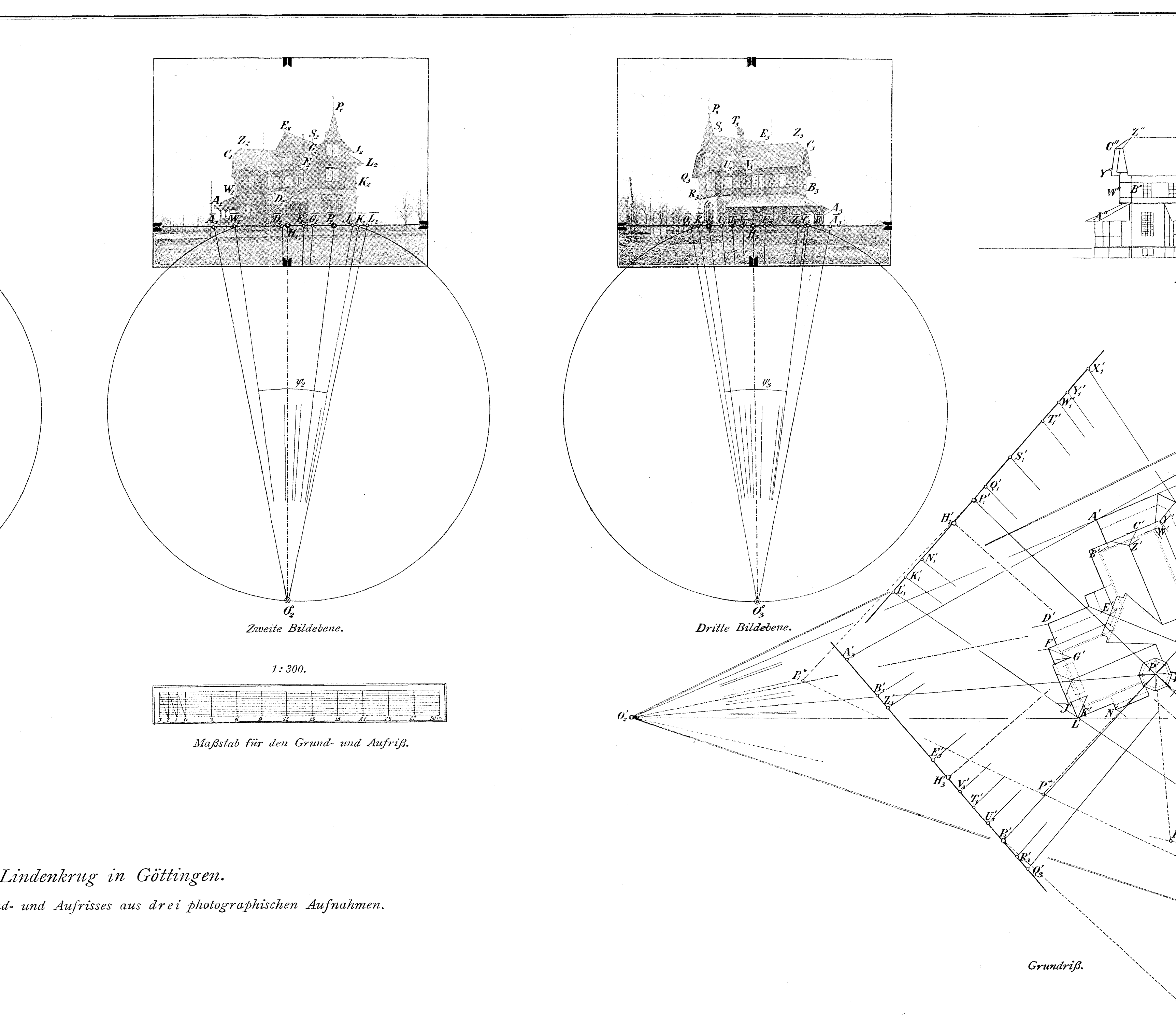
Ich möchte noch einmal darauf hinweisen, daß es unser Bestreben war, bei unserem Projektionsapparat möglichst einfache und praktische Einrichtungen zu treffen. Wie Sie gesehen haben, ist eine Verdunklung des Zimmers nicht nötig gewesen, was sehr wesentlich ist; andererseits ist der Projektionsapparat in verschiedenen Lehrsälen zu verwenden, da er tragbar ist und in den einzelnen Sälen Anschluß an die elektrische Leitung, ein in die Wand eingelassenes Brett zur Aufnahme des Apparates und ein von der Decke herabzulassender Projektionsschirm angebracht sind. In nächster Woche hat auch die Firma Rudolph Nachfolger hierselbst, von der unser Apparat bezogen ist, sich erboten, ihren neu konstruierten großen Apparat Ihnen vorzuführen, der auch episkopische und mikroskopische Projektionen gestattet, d. h. direkt Projektionen von Zeichnungen oder Abbildungen in ihren natürlichen Farben, von Gegenständen

1) Vgl. den Vortrag von Hrn. F. Klein in diesem Sammelbande I. Teil, p. 17.

mäßiger Dicke, wie Taschenuhren, Schmetterlingen u. dgl., sowie andererseits von mikroskopischen Präparaten.[1]) Es soll mich freuen, wenn es mir gelungen ist, Ihnen zu zeigen, wie der Projektionsapparat auch beim mathematischen Unterricht an den Hochschulen und höheren Schulen vorzügliche Verwendung finden kann. Daß für Ihre Schulen noch seine überaus zweckmäßige Benutzung beim Unterricht in Physik, Chemie, beschreibenden Naturwissenschaften und Geographie hinzukommt, brauche ich nicht näher auszuführen.

1) Ich möchte nicht unterlassen, auch auf die vortrefflichen Apparate dieser Art von der Firma Carl Zeiß in Jena hinzuweisen.

Namenverzeichnis.



Lindenkrug in Göttingen.

d- und Aufrisses aus drei photographischen Aufnahmen.